**Examen convocatoria ordinaria Matemáticas aplicadas a Ciencias Sociales junio 2023**

## Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

**1.** En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

**2.** La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a $70000$ unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

## Bloque 2

**1.** Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de $t$ la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

**2.** La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es $-12$. Calcula razonadamente los valores de los parámetros $a$, $b$, y $c$. (1.5 puntos)

## Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

**3.** En un determinado instituto el $50\,\%$ de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un $30\,\%$ de estos no publica habitualmente nada. El $35\,\%$ prefiere Instagram, pero solo el $30\,\%$ de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un $60\,\%$ de estos no publica habitualmente.

a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

**4.** Una asociación benéfica ha tomado una muestra de $9$ personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo $60$, $40$, $55$, $35$, $20$, $25$, $50$, $45$ y $30$ euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros$^2$,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del $97\,\%$. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que $2$ euros. (1 punto)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |

## Bloque 2

**3.** Un teatro ha vendido las $660$ entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al $10\,\%$ de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

**4.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula $\frac{1}{3}B^2 - I$, donde $I$ es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A - B) - C$ y $B \cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

## Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

**5.** De los $80$ estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, $50$ son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a $3$ estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)

b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)

c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

**6.** Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de $81$ motores para examinar su peso, proporcionando una media de $153$ kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ kg,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del $95\,\%$. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño $100$ y un nivel de confianza del $93.12\,\%$? (0.5 puntos)

c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de $145$ kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del $92\,\%$? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |

## Bloque 2

**5.** Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2 + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ t - 2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - (t+3)x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de $t$ para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -2$ y en $x = 2$? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 3$. (0.75 puntos)

**6.** La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con $x =$ tiempo en segundos y $0 \leq x \leq 10$.

a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los $3$ segundos? (0.5 puntos)

b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a $32$ metros de altura? (0.5 puntos)

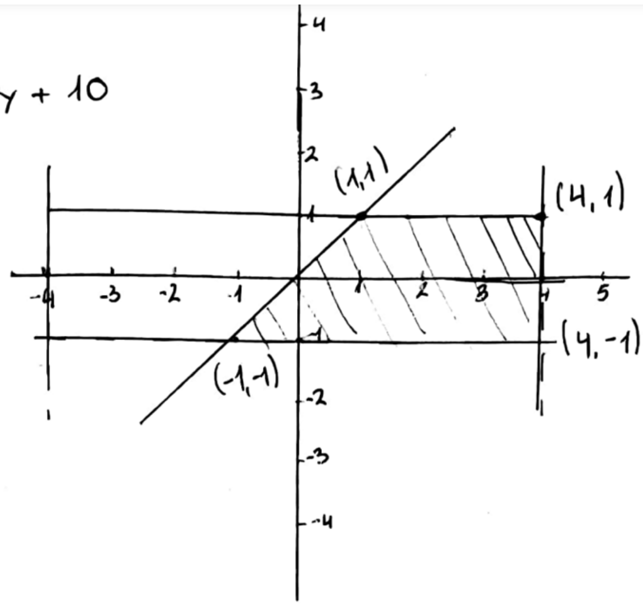
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

**<u>Sección 1</u>**
**Bloque 1**

1. $f(x,y) = -x - 5y + 10$

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a)




b) $f(1,1) = -1 - 5 + 10 = 4$

$f(-1,-1) = 1 + 5 + 10 = 16 \rightarrow$ MÁXIMO

$f(4,1) = -4 - 5 + 10 = 1 \rightarrow$ MÍNIMO

$f(4,-1) = -4 + 5 + 10 = 11$

2º) $x \rightarrow$ DISCO I $\quad y \rightarrow$ DISCO II $\quad z \rightarrow$ DISCO III

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 70.000 \\ x + y = z \\ z - y = 3(y - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 70.000 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

b) RESOLVEMOS POR CRAMER YA QUE SABEMOS QUE SOLO PUEDE TENER UNA ÚNICA SOLUCIÓN $\Rightarrow$ S.C.D.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70.000 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70.000 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-210.000}{-14} = \boxed{15.000}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 70.000 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-280.000}{-14} = \boxed{20.000}$$

$\boxed{z = 35.000} \rightarrow$ SE PUEDE CALCULAR DESPEJANDO DEL SISTEMA DE ECUACIONES O POR CRAMER.

## Bloque 2

1.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) PARA SABER SI ES CONTINUA, ESTUDIAREMOS LOS LÍMITES LATERALES

$f(x)$ ES CONTINUA SI $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \cdot 1^2 + t \cdot 1 - 1 = 2 + t - 1 = 1 + t$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 + t$

$1 + t = 1 + t$

ESTO NOS INDICA QUE $f(x)$ VA A SER CONTINUA PARA CUALQUIER VALOR DE $t$.

b) PARA $t = 2$, EXTREMOS RELATIVOS $(f'(x) = 0)$ $(-\infty, 1)$

$f'(x) = 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = 0$ ; $4x + 2 = 0$ ; $x = -\frac{1}{2}$

$f(-1/2) = 2 \cdot (-1/2)^2 + 2 \cdot (-1/2) - 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

c)

| $f'(x) < 0$ | $-1/2$ | $f'(x) > 0$ |
|---|---|---|
| ↘ | | ↗ |

DECRECE $(-\infty, -1/2)$

CRECE $(-1/2, 1)$

2. $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

PUNTO INFLEXIÓN $(2, -5)$

PENDIENTE EN ESE PUNTO $= -12$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

PUNTO INFLEXIÓN EN $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 0$ ; $\boxed{12a + 2b = 0}$

PUNTO INFLEXIÓN EN $(2, -5) \Rightarrow f(2) = -5$; $\boxed{8a + 4b + c = -5}$

PENDIENTE $= -12 \Rightarrow f'(2) = -12$ ; $\boxed{12a + 4b = -12}$

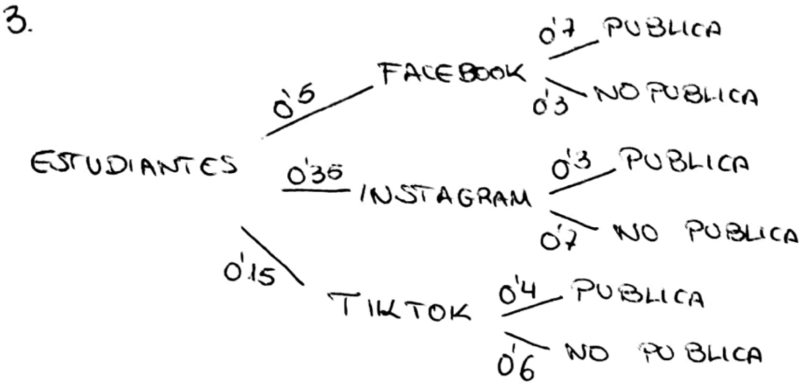
$$\begin{cases} 12a + 2b = 0 \\ 12a + 4b = -12 \end{cases} \overset{\text{REDUCCIÓN}}{\Rightarrow} -2b = +12 \Rightarrow b = -6, \quad a = 1$$

$8a + 4b + c = -5 \Rightarrow 8 - 24 + c = -5 \Rightarrow c = 11$

$$\boxed{\begin{matrix} b = -6 \\ a = 1 \\ c = 11 \end{matrix}}$$

**Sección 2**
**Bloque 1**

3.




a) P(NO PUBLICA) = P(FACEBOOK ∩ NO PUBLICA) + P(IG ∩ NO PUB.) + P(TIKTOK ∩ NP)

$P(\text{NO PUBLICA}) = 0'5 \cdot 0'3 + 0'35 \cdot 0'7 + 0'15 \cdot 0'6 = 0'485 \quad (48'5\%)$

b) $P(IG / \text{PUBLICA}) = \dfrac{P(IG \cap \text{PUBLICA})}{P(\text{PUBLICA})} = \dfrac{0'35 \cdot 0'3}{1 - 0'485} = 0'204 \quad (20'4\%)$

4. MUESTRA = 9 PERSONAS

CANTIDADES DONADAS: 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45, 30 ; $\bar{x} = 40$ EUROS

VARIANZA $\sigma^2 = 100$ EUROS$^2$ $\Rightarrow \sigma = 10$ EUROS

a) I. C PARA NIVEL CONFIANZA DEL 97%

$1 - \alpha = 0'97 \Rightarrow \alpha = 0'3 \Rightarrow \alpha/2 = 0'15 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2'17$

INTERVALO CONFIANZA $= \left(\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ; $(32'77,\ 47'23)$

b) ERROR $= Z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ ERROR $= 2$ ; $2 = 2'17 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n} = 10'85 \Rightarrow n = 117'7 \approx 118$ PERSONAS

3. X = NIÑOS    Y = ADULTOS    Z = JUBILADOS

a)
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=660 \\ \frac{y}{4}=z \\ x=0'1(z+y) \end{array}\right\} \begin{array}{l} x+y+z=660 \\ y-4z=0 \\ 10x-y-z=0 \end{array}$$

b) RESOLVEMOS POR CRAMER → S.C.D.
$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 660 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 10 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$|A|=-55$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 660 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-3300}{-55}=\boxed{60}$$

$$\boxed{z=120}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 660 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 10 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-26400}{-55}=\boxed{480}$$

4. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&2&2\end{pmatrix}$

$C^T=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$

a) $A\cdot B\cdot C^T$ -> PRIMERO REALIZAMOS $A\cdot B$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B\cdot C^T=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

b) $\frac{1}{3}B^2-I$ : $B^2=B\cdot B$ : $\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$

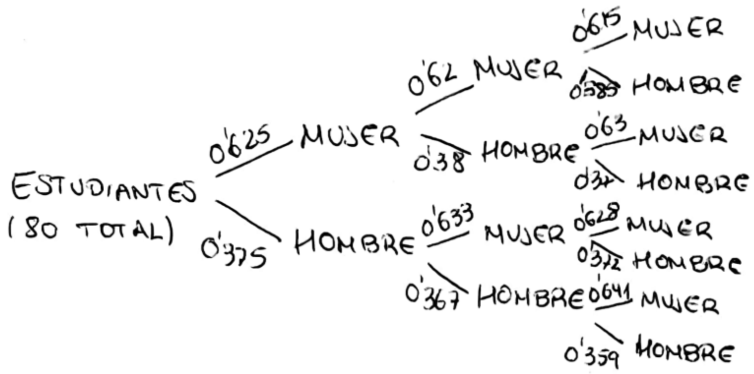
$$\frac{1}{3}B^2-I=\begin{pmatrix}2/3&1/3&-1/3\\-1/3&0&1/3\\-1/3&-1/3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3&1/3&-1/3\\-1/3&-1&1/3\\-1/3&-1/3&-1\end{pmatrix}$$

c) NO PUEDE REALIZARSE NINGÚN CÁLCULO PORQUE

* $(A-B)-C$ → NO TIENEN LA MISMA DIMENSIÓN

* $B\cdot C$ → PARA QUE DOS MATRICES PUEDAN MULTIPLICARSE EL NÚMERO DE COLUMNAS DE LA PRIMERA MATRIZ DEBE SER IGUAL AL NÚMERO DE FILAS DE LA SEGUNDA.

5.




a) $P(X = \text{MUJERES}) = \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{48}{78} = 0'625 \cdot 0'62 \cdot 0'615 = 0'238$ $(23'8\%)$

b) $P(X = \text{MISMO SEXO}) = P(X = \text{MUJERES}) + P(X = \text{HOMBRES}) =$

$= 0'238 + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = 0'238 + 0'049 = 0'287$

$(28'7\%)$

c) $P(\text{HOMBRES} \geq 2) = P(\text{HOMBRES} = 2) + P(\text{HOMBRES} = 3) =$

$= 0'625 \cdot 0'38 \cdot 0'37 + 0'375 \cdot 0'633 \cdot 0'372 + 0'375 \cdot 0'367 \cdot 0'641 +$

$0'375 \cdot 0'367 \cdot 0'359 = 0'313$ $(31'3\%$

6. TAMAÑO MUESTRA = 81 MOTORES

$\bar{x} = 153$ kg  $\sigma = 30$ kg

a) $I.C. = \left(\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ PARA NIVEL CONFIANZA 95%

$1-\alpha = 0'95 \Rightarrow \alpha/2 = 0'25 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1'96$

$I.C = (146'47, 159'53)$

b) ERROR PARA TAMAÑO MUESTRA = 100 Y NIVEL CONFIANZA 93'12%

$1-\alpha = 0'9312 \Rightarrow \alpha/2 = 0'0344 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1'82$

$E = 1'82 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 5'46$

c) NIVEL CONFIANZA 92% $\rightarrow 1-\alpha = 0'92 \Rightarrow \alpha/2 = 0'04$

NO SE PODRÍA CONSIDERAR COMO VÁLIDO, YA QUE AL DISMINUIR EL NIVEL DE CONFIANZA DISMINUYE TAMBIÉN EL ERROR Y EL INTERVALO. SI CON UN 95%, EL VALOR DE 145 NO SE ENCUENTRA DENTRO DE LOS VALORES DEL INTERVALO, CON UN 92% TAMPOCO.

5. $f(x)\begin{cases} -(x+t)^2+2 & \text{si } x\leq -2 \\ t-2 & \text{si } -2<x\leq 2 \\ x^2-(t+3)x+9 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) PARA QUE SEA CONTINUA: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

$x=-2$: $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = t-2$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -(-2+t)^2+2 \Rightarrow -(4+t^2-4t)+2 \Rightarrow -t^2+4t-2$

$-t^2+4t-2 = t-2$ ; $-t^2+3t=0 \Rightarrow$ $t=0$, $\boxed{t=3}$

$x=2$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4-2t-6+9 = 7-2t$

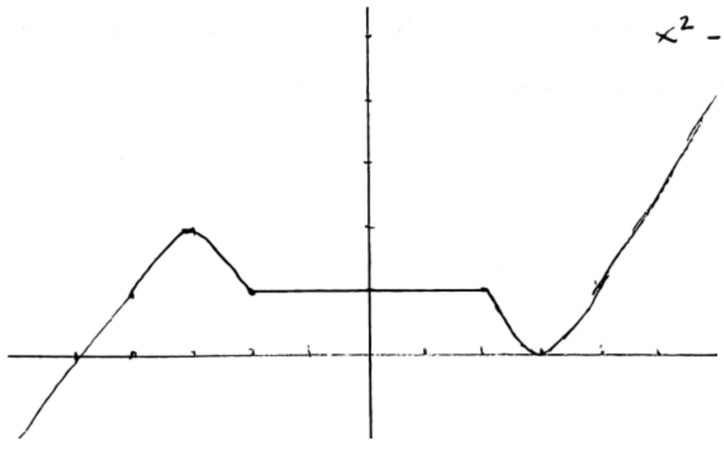
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = t-2$

$\begin{cases} 7-2t = t-2 \\ 9=3t \Rightarrow \boxed{t=3} \end{cases}$

PARA $t=3$ $f(x)$ ES CONTINUA

$\begin{cases} -(x+3)^2+2 & x\leq -2 \\ 1 & -2<x\leq 2 \\ x^2-6x+9 & x>2 \end{cases}$

b)



6. $H(x) = 20x - 2x^2$ con $x$ (s) y $0 \leq x \leq 10$

a) $H(3) = 20 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 60 - 18 = 42$ m.

b) $H(x) = 32$ ; $20x - 2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x = 2$ s.

$x = 8$ s.

c) $H'(x) = 0$

$H'(x) = 20 - 4x \Rightarrow x = 5$ s.

$H(5) = 20 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 \Rightarrow H(5) = 50$ m.