ALBACER ACADEMIA DE ESTUDIOS

Evaluación para el acceso a la Universidad

Curso 2022/2023 (Junio)

Materia: Matemáticas II

1. a) $A \cdot X = B$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b \\ 4a+2c & 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2a+c=1 \\ 4a+2c=2 \\ 2b=0 \\ 4b=0 \end{array}\right\} \quad \boxed{b=0} \quad \left.\begin{array}{l} 2a+c=1 \\ 4a+2c=1 \end{array}\right\} F_2 = F_2 - 2F_1 \left\{\begin{array}{l} 2a+c=1 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

S.C.I.

$$\boxed{2a = 1 - c}$$

b) Para que la matriz sea simétrica, debe tener a ambos lados de la diagonal principal los elementos iguales.

Para que X sea simétrica, como $b=0$:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{c=0} \qquad 2a = 1-c \quad 2a = 1 \quad \boxed{a = \frac{1}{2}} \qquad X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. a) Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y que toma signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un valor $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10 \quad [0,2]$

Función polinómica $\rightarrow$ Dom $= \mathbb{R}$

· Continua en $[0,2]$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -10 \\ f(2) = 28 \end{array}\right\} \text{Distinto signo en los extremos.}$$

$\boxed{\text{Existe al menos un valor } c\text{, en el intervalo } [0,2] \text{ tal que } f(c)=0}$

c) Aplicamos T. Rolle:

Continua en $[0,2]$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 3$

Derivable en $(0,2)$

$f(0) \neq f(2)$

No se cumple T. Rolle, por tanto no existe c tal que $f'(c) = 0$ en dicho intervalo, y la función no cortará dos veces al eje X.

Si resolvemos las raíces de la función:

$x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$

$\boxed{x = -5} \longrightarrow \notin [0,2]$

$\boxed{x = 1} \longrightarrow \in [0,2]$ Una única raíz en el intervalo dado.

$\boxed{x = -2} \longrightarrow \notin [0,2]$

3.

$A(1,1,a)$

$\pi \equiv bx + y + z = 1$

a) $\vec{u} = (1,2,0)$

Para que π contenga a A:

$b \cdot 1 + 1 + a = 1$

$b + 1 + a = 1$

$b + a = 0$

$\boxed{a = 2}$

Para que $\vec{n} \perp \vec{u}$:

$(b,1,1) \cdot (1,2,0) = 0$

$b + 2 = 0$

$\boxed{b = -2}$

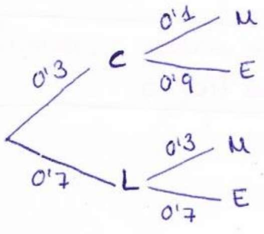
b) $A(1,1,2)$ $\quad \pi \equiv -2x + 1 + z = 1$

$\vec{v_r} = \vec{n} = (-2,1,1)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} ; \quad r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

4.

a)



a.1.) $P(M) = P(C \cap M) + P(L \cap M) =$
$= 0'3 \cdot 0'1 + 0'7 \cdot 0'3 = \boxed{0'24}$

a.2.) $P(L/E) = \dfrac{P(L \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0'7 \cdot 0'7}{0'76} = \boxed{0'645}$

$P(E) = P(C \cap E) + P(L \cap E) = 0'3 \cdot 0'9 + 0'7 \cdot 0'7 = 0'76$

b) $N(1'5, 0'15)$

b.1.) $P(X < 1,35) = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0'8413 =$

$\boxed{Z = \dfrac{1,35 - 1,5}{0'15} = -1}$ $= \boxed{0'1587} \rightarrow 15'87\%$

b.2.) $P(X < A) = \quad P(Z < Z_1) = 0'8508$

$1,04 = \dfrac{x - 1'5}{0'15}$

$0'156 = x - 1'5$

$\boxed{x = 1,656}$ minutos.

5.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}} = \int \frac{1}{(t^6)^{1/2}-(t^6)^{2/3}} \cdot \frac{6t^5 dt}{-3} = -2\int \frac{t^5}{t^3 - t^4} dt =$

$1 - 3x = t^6$

$-3dx = 6t^5 dt$

$\displaystyle = -2\int \frac{t^{\cancel{5}}}{\cancel{t^3}(1-t)} dt = -2\int \frac{t^2}{1-t} dt = -2 \cdot \int -t - 1 + \frac{1}{1-t} dt = \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} + 2t - 2\ln(1-t) + C =$

$= \boxed{(\sqrt[6]{1-3x})^2 + 2\sqrt[6]{1-3x} - 2\ln(1 - \sqrt[6]{1-3x}) + C}$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & 1-t \\ \hline \cancel{t^2} - t & -t - 1 \\ \quad \cancel{t} & \\ \quad \cancel{t} - 1 & \\ \quad\quad 1 & \end{array}$$

b)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ A^{-1} existe puesto que A es una matriz cuadrada de determinante no nulo.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1}\cdot B \longrightarrow$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \text{No tiene inversa}$$

Como $A\cdot B$ no tiene inversa, por las propiedades de los determinantes, se espera que $A^{-1}\cdot B$ tampoco tenga inversa.

6.

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} = 1^{\infty}\,\text{IND} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1}{5x}\right)} = \boxed{e^{\infty}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{\cancel{5x}+1-\cancel{5x}}{5x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{5\cancel{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{5} = \boxed{\infty}$$

b) $A(2,1,3)$ $\vec{u}=(2,2,0)$ $\vec{v}=(0,0,-1)$

$$\vec{w_r} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i}+2\vec{j} = (-2,2,0)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad ; \quad r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{0}$$

7.

a) $f(x) = x^3+3x^2+x+3$

$f'(x) = 3x^2+6x+1$

$3x^2+6x+x=0$

$x = \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$ $\quad x = \dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$

$\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$ $\quad \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

$f'(-3)=10$ $\quad f'(-1)=-2$ $\quad f'(0)=1$

$\nearrow$ $\quad \searrow$ $\quad \nearrow$

$\max = -1'81$ $\quad \min = -0'18$

b) $N(1'5, 0'15)$

b.1.) $P(X < 1,35) = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0'8413 =$

$\boxed{Z = \dfrac{1,35 - 1,5}{0'15} = -1}$ $= \boxed{0'1587} \rightarrow 15'87\%$

b.2.) $P(X < A) = \quad P(Z < Z_1) = 0'8508$

$1,04 = \dfrac{x - 1'5}{0'15}$

$0'156 = x - 1'5$

$\boxed{x = 1,656}$ minutos.

5.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}} = \int \frac{1}{(t^6)^{1/2} - (t^6)^{2/3}} \cdot \frac{6t^5 dt}{-3} = -2\int \frac{t^5}{t^3 - t^4} dt =$

$1 - 3x = t^6$

$-3dx = 6t^5 dt$

$\displaystyle = -2\int \frac{t^{\cancel{5}}}{\cancel{t^3}(1-t)} dt = -2\int \frac{t^2}{1-t} dt = -2 \cdot \int -t - 1 + \frac{1}{1-t} dt = \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} + 2t - 2\ln(1-t) + C =$

$= \boxed{(\sqrt[6]{1-3x})^2 + 2\sqrt[6]{1-3x} - 2\ln(1 - \sqrt[6]{1-3x}) + C}$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{t^2} & 1-t \\ \hline \cancel{t^2} - t & -t - 1 \\ \hline \cancel{t} & \\ \cancel{t} - 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

b)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ A^{-1} existe puesto que A es una matriz cuadrada de determinante no nulo.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $E = \{1, 2, 3, 4\}$

b.1.) $P(X=3) = P(1 \cap 2) + P(2 \cap 1)$

$= P(1) \cdot P(2) + P(1) \cdot P(2) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \boxed{0'167}$

b.2.)

$1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(1 \cap 1) + P(2 \cap 1) + P(1 \cap 2)]$

$= 1 - \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}\right] = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{0'75}$

8

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 2 - 1 = 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 4 = -4 \neq 0 \rightsquigarrow \boxed{RgA = 3}$

b) $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$

$\pi_2 \equiv y + 2z = 1$

$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\pi_3 \equiv 2x + y = 1$

$RgM \leq 2$ (apartado anterior)

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightsquigarrow \boxed{RgM = 2}$

$\boxed{RgM^* = 3}$ (Apartado anterior)

$\boxed{RgM = 2 \neq RgM^* = 3 \rightarrow \text{SI} \text{ La recta y el plano son paralelos}}$