

Examen convocatoria extraordinaria Matemáticas aplicadas a Ciencias Sociales julio 2023

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40% de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x + 1| + t & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3 + 2x^2 + (t + 2)x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 puntos)
b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0.5 puntos)
c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \infty)$. (0.5 puntos)

2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x) = ax^2 + bx - 20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto $(6, 16)$. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30 % de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60 % le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75 % afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

- Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0.75 puntos)
- Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0.75 puntos)

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 51$ calorías,

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)
- Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.64 %, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quintuplo del número de botellas vino tinto.

- Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0.5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el 9 % de los paquetes llega con retraso, el 14 % llega defectuoso y 19 % llega con retraso o defectuoso o ambos.

- Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0.75 puntos)
- Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso? (0.75 puntos)

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros². Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19 metros.

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)
- Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95.96 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq c \\ 6x+3 & \text{si } x > c \end{cases}$

- ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
- Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0.75 puntos)

6. El consumo de agua, en dm³, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo $x =$ el tiempo medido en horas y $0 \leq x \leq 6$.

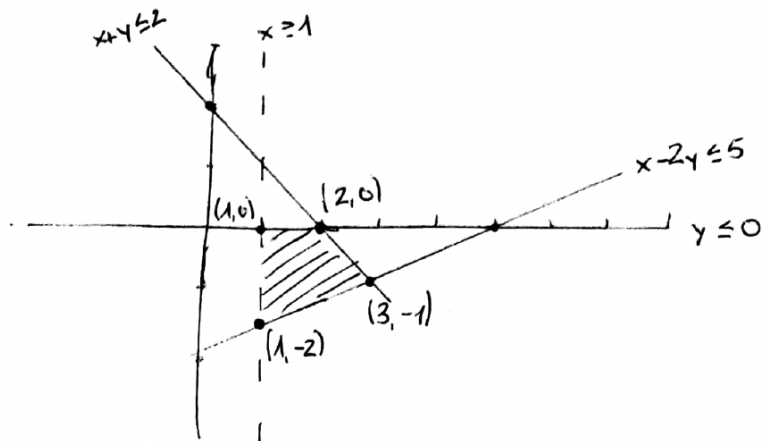
- ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)
- ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

Soluciones

Sección 1
Bloque 1

1.
$$\left. \begin{array}{l} x+y \leq 2 \\ x-2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{array} \right\} f(x,y) = 4x + 5y - 3$$

a)



b) $f(1,0) = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 3 = 1$
 $f(2,0) = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 - 3 = 5 \rightarrow \text{Máximo}$
 $f(1,-2) = 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) - 3 = -9 \rightarrow \text{Mínimo}$
 $f(3,-1) = 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) - 3 = 4$

2. x = arte urbano y = arte abstracto z = graffiti

a)
$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=110 \\ 0'4x + 0'4y = 28 \\ 2y = 3z \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=110 \\ 4x+4y=280 \\ 2y-3z=0 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 4 & 4 & 0 & 280 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

 $|A| = 8$

CRAMER

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 110 & 1 & 1 \\ 280 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{80}{8} = \boxed{10}$$

$$\boxed{z = 40}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 110 & 1 \\ 4 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{480}{8} = \boxed{60}$$

Bloque 2

$$1. f(x) = \begin{cases} |x+1| + t & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3 + 2x^2 + (t+2)x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) t CONTINUA EN $x=0$? \rightarrow LÍMITES LATERALES IGUALES

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 + t \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} 1 + t = 3 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

b) $f'(x)$ INTERVALO $(0, +\infty) = -3x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ Max} \\ x=-\frac{2}{3} \text{ Min} \end{cases}$

c) $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$

DECRECE: $(-\infty, 2/3) \cup (2, +\infty)$
 CRECE: $(-2/3, 2)$

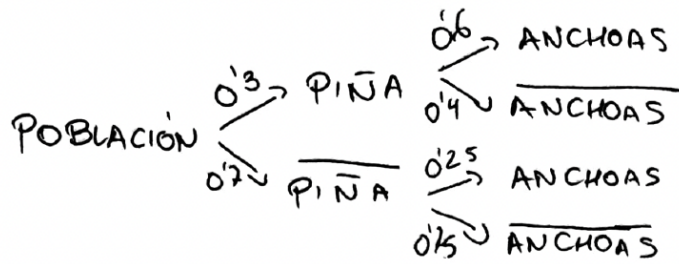
2. $f(x) = ax^2 + bx - 20$ Máximo $(6, 16)$

$$\left. \begin{array}{l} f(6) = 16 \Rightarrow 36a + 6b - 20 = 16 \\ f'(6) = 0 \Rightarrow 2ax + b; 12a + b = 0 \Rightarrow b = -12a \end{array} \right\}$$

$$36a - 72a = 36 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 12 \end{array}}$$

Sección 2
Bloque 1

3.



a) $P(\text{ANCHOAS}) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.25 = 0.535 \text{ (53.5\%)}$

b) $P(\text{PIÑA} | \overline{\text{ANCHOAS}}) = \frac{P(\text{PIÑA} \cap \overline{\text{ANCHOAS}})}{P(\overline{\text{ANCHOAS}})} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.465} = 0.258 \text{ (25.8\%)}$

4. $n = 36$ BIZCOCHOS $\bar{x} = 223 \text{ cal}$ $\sigma = 51 \text{ cal}$.

a) NIVEL CONFIANZA = 95%. $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025$
 $z_{\alpha/2} = 1.96$

I. C. = $\left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (206.34, 239.66)$

b) $n?$ PARA ERROR < 10 cal $\text{ERROR} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

NIVEL CONFIANZA: 94.64%

$1 - \alpha = 0.9464 \rightarrow \alpha = 0.0536 \rightarrow \alpha/2 = 0.0268 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.93$

$\text{ERROR} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; 10 = 1.93 \cdot \frac{51}{\sqrt{n}} ; n \approx 97 \text{ PERSONAS}$

Bloque 2

3. $x = \text{blanco}$ $y = \text{rosado}$ $z = \text{tinto}$

$$a) \begin{cases} x + y + z = 50 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases} \quad A: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad |A| = 17$$

$$b) \text{ CRAMER: } x = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{255}{17} = \underline{15 \text{ BOTELLAS}}$$

4. COMMUTAN $\Rightarrow M \cdot N = N \cdot M$

$$a) \begin{cases} M \cdot N = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ N \cdot M = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{COMMUTAN}$$

$$b) M \cdot P \cdot X = N^T - M \quad M \cdot P = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N^T - M = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(M \cdot P)^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (M \cdot P)^{-1} \cdot (N^T - M) = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 & -10/3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$c) (N+I)^2 = (N+I) \cdot (N+I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$

Sección 3
Bloque 1

$$5. P(R) = 0'09 \quad P(D) = 0'14 \quad P(R \cup D) = 0'19$$

$$a) P(R \cap D) = P(R) + P(D) - P(R \cup D) = 0'04 \quad (4\%)$$

$$b) P(D|R) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0'04}{0'09} = 0'444 \quad (44\%)$$

$$6. n = 9 \text{ ATLETAS} \quad \sigma^2 = 81 \text{ metros}^2 \Rightarrow \sigma = 9 \text{ metros}$$

$$\text{MEDIDAS: } 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14, 19 \rightarrow \bar{x} = 16'78 \text{ m}$$

$$a) \text{ NIVEL CONFIANZA } 97\% \quad 1 - \alpha = 0'97; \alpha = 0'03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015$$
$$Z_{\alpha/2} = 2'17$$

$$\text{I.C} = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \text{ I.C} = (10'27, 23'21)$$

b) DISMINUYENDO EL TAMAÑO MUESTRAL

$$c) \text{ NIVEL CONFIANZA: } 95'96\% \quad 1 - \alpha = 0'9596; \alpha = 0'0404 \rightarrow \alpha/2 = 0'0202$$
$$n = 49 \quad Z_{\alpha/2} = 2'05$$

$$\text{error} = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \text{ error} = 2'05 \cdot \frac{9}{\sqrt{49}} = \underline{2'64}$$

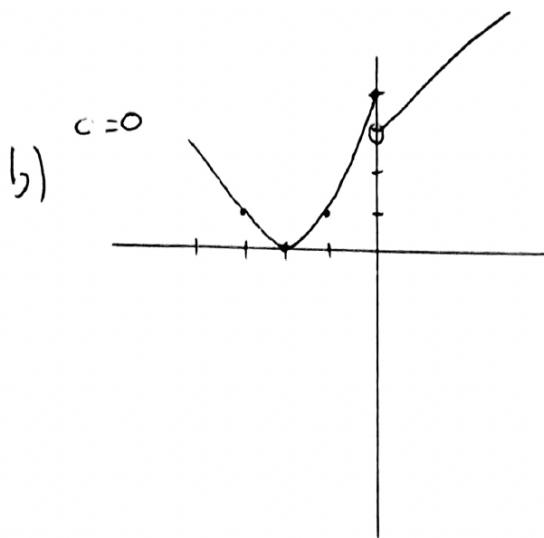
Bloque 2

$$5. f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq c \\ 6x+3 & \text{si } x > c \end{cases}$$

4) LÍMITES LATERALES

$$c^2 + 4c + 4 = 6c + 3 ; \quad c^2 - 2c + 1 \text{ (IDENTIDAD NOTABLE)}$$

$$\Leftrightarrow (c-1)^2 \Rightarrow \boxed{c=1}$$



$$6. C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$$

$$a) C'(x) = 3x^2 - 24x + 45 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 \quad \begin{matrix} \nearrow x=5 \\ \searrow x=3 \end{matrix}$$

$$C(5) = 50 \text{ dm}^3$$

$$C(3) = 54 \text{ dm}^3$$

b) $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$ DECRECE (3, 5)