Julio 2024

MATEMÁTICAS II

1 a)

x helado 1 bola
y " 2 bolas
z " 3 bolas

$$\left[\begin{array}{lr} x + y + z = 157 & \text{I} \\ x + 2y + 3z = 278 & \text{II} \\ x - kz = 0 & \text{III} \end{array}\right]$$

I La suma de los vendidos es 157

II Las ganancias es el número de helados multiplicado por el precio de cada tipo

III $x = kz$

b) Según el Teorema de Rouché-Frobenius * (Teoría), para que la solución sea única ha de ser S.C.D, si cumple $Rg(A) = Rg(A|B) =$ nº incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -k & 0 \end{array}\right)$$

A

A|B

$|A| = -k+1$

- Si $|A| = 0 \rightarrow k = 1$ entonces $Rg(A) = 2$ y no puede ser S.C.

- Así que si $k \neq 1$ el sistema es S.C.D, con solución única. Pero según la tercera ecuación $x = z$ sólo si $k=1$, que es el caso excluido. Así que no es posible.

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < 3 \\ \dfrac{2x}{x-4} & x \geq 3 \end{cases}$

a) Primero analizamos los trozos de la función, siendo el primero continuo por ser un polinomio; y el segundo, al tratarse de una función racional será discontinua donde el denominador se anule:

- $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$ (válido ya que $x \geq 3$).

Se trata de una discontinuidad asintótica en $x = 4$ (o de salto infinito)

- También hay que considerar el punto de unión de los dos trozos por la Definición de continuidad (Teoría $*$) en $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} x^2 + 2x + 1 = 16$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-4} = -6$$

$\rightarrow$ Como son distintos los límites laterales pero son finitos, además hay una discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

b) La ecuación de la recta tangente es:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, siendo $x_0 = 2$

$f'(x)\big|_{x=2} = 2x + 2 \rightarrow f'(2)\big|_{x=2} = 6$

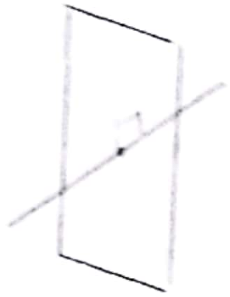
$f(2) = 9$

$$\boxed{y - 9 = 6(x - 2)}$$

3.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases} \qquad \pi \equiv \begin{cases} \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r \\ A \in \pi \end{cases}$$

a)



$A = (2,1,1)$

- Para sacar $\vec{v}_r$ pasaremos a paramétricos realizando $[x = t]$:

$x - z = 1 \longrightarrow [z = t - 1]$

$2x - y + z = 3 \rightarrow \quad y = 2x + z - 3 \longrightarrow [y = 3t - 4]$

- De esta forma:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 4 \\ z = t - 1 \end{cases} \longrightarrow \quad \vec{v}_r = (1,3,1) = \vec{n}_\pi$$

$\pi \equiv \quad x + 3y + z + d = 0$

Obtenemos d teniendo en cuenta que $A \in \pi$

$$2 + 3 \cdot 1 + 1 + d = 0 \rightarrow \quad d = -6$$

$$\boxed{\pi \equiv \quad x + 3y + z - 6 = 0}$$

b) $\quad F(2,-2,1)$

$$\left[d(F,\pi) = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{11}} \, u \right]$$

4

a) $\left[\int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx\right] =$

$$= \int 2\,dx - \int \frac{2}{x^2+1}$$

$$= 2x - 2\operatorname{arctg} x + C$$

$$\begin{array}{r|l} \overset{P}{2x^2} & \overset{Q}{x^2+1} \\ \cline{2-2} -\ 2x^2+2 & 2 = C \\ \hline / \quad -2 = R & \end{array}$$

$$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$$

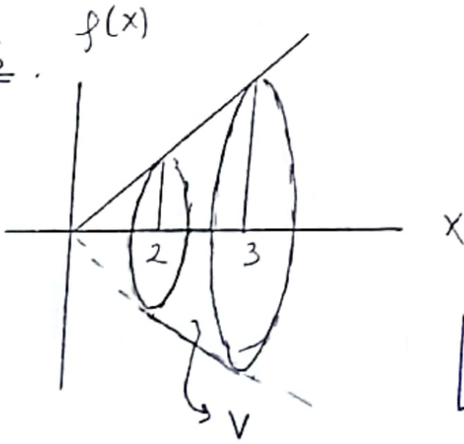
b)

$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = a \qquad |A^2| = a^2$

Esto es debido a que los determinantes cumplen $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ por lo que $|A^2| = |A|^2 = a^2$. Por ello $|A^n| = |A|^n = a^n \ \forall n > 2$.

5.



a) Teniendo en cuenta un volumen de revolución definido por $f(x) = x$:

$$V = \int_2^3 \pi f^2(x)\,dx = \int_2^3 \pi x^2\,dx =$$

$$= \left.\frac{\pi x^3}{3}\right]_2^3 = \pi \cdot \frac{3^3}{3} - \pi \frac{2^3}{3} = \frac{19\pi}{3}\ u^3$$

5 b)

$$\begin{array}{c} \pi_1 \rightarrow \\ \pi_2 \rightarrow \\ \pi_3 \rightarrow \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)}_{\substack{A \\ A|B}}$$

· Teorema R-F *

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rg(A) \leq 2 \quad |A|_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$Rg(A) = 2$$

· Cambiamos la columna B por las de A:

$$| \ |_{B\rightarrow 1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rg(A|B) = 3 \neq Rg(A)$$

· Sabiendo que el S.I podemos conocer la posición relativa en función de π. Como son independientes entre sí dos a dos, no existen dos planos paralelos entre sí, y los planos tienen forma de "tejado".

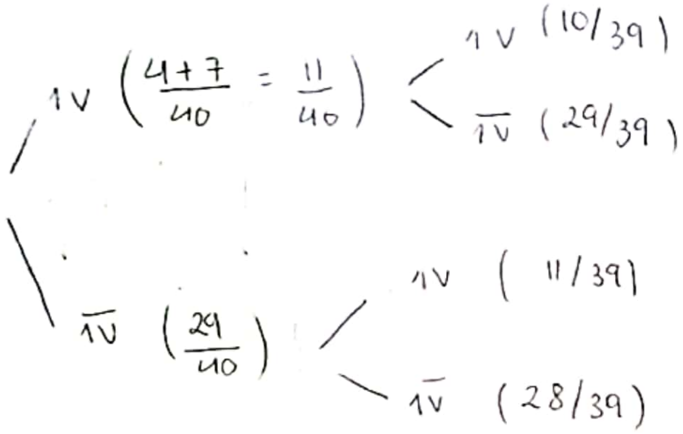
6 a)

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x} = \left[\frac{0}{0}\right]^{IND} \longrightarrow \text{L'Hôpital } *$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3x^2+4x+1}{2x+2} = -\frac{5}{2}$$

b)

40 cartas : 4 V , 5 R , 7 VR , 24 X



b1.) $P(2V) = \frac{11}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{11}{156} \simeq 7\%$

b2.) $P(1R \mid 1V) = \frac{P(1R \cap 1V)}{P(1V)} = \frac{7/40}{11/40} = 7/11 \simeq 63'6\%$

7 a)

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{*\,\mathrm{I}}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \overset{0\,*\,\mathrm{II}}{\cancel{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}} =$$

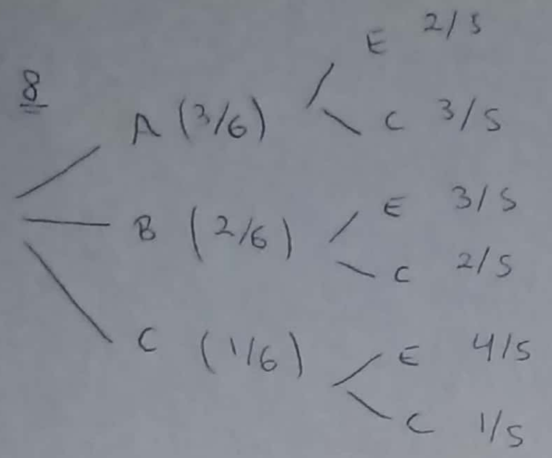
$$\overset{*\,\mathrm{III}}{=} 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$$

* I, II, III Propiedades (Teoría)

b) Si es paralela a la recta dada tiene el mismo vector director: $\vec{v}_r = (1,1,-2)$, además de contener a A(0,1,0)

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{-2}$$

8



a.1) $\left[P(C) = P(A\cap C) + P(B\cap C) + P(C\cap C) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = 7/15 \simeq 46'7\ \% \right]$

a.2) $\left[P(B|C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{2/6 \cdot 2/5}{2/6} = 2/5 = 40\ \% \right]$

b) Binomial: solo hay dos opciones

$p = 0'25 \qquad n = 5$

b.1.) $P(X=2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{TABLA}}$ $\rightarrow$ $\left[P(X=2) = 0'2637 \right]$

$(K=2)$

b.2.) $\left[P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) \overset{\boxed{\text{TABLA}}}{=} 1 - 0'2373 = 0'7627 \right]$