

ORDINARIA 2021 MATEMÁTICAS II

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) [1 punto] Calcula razonadamente el determinante de A^T , es decir, la matriz traspuesta de A .
b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.
2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & a+1 \\ a \cdot x & & +z & = & a-1 \\ x & -y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

- b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.
3. a) [1,25 punto] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x} dx$.
(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)
b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3} dx$.
4. a) [1,25 puntos] Sea el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r .
b) [1,25 puntos] Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

5. Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(1, 1, 2)$.

- [1,25 puntos] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .
 - [1,25 punto] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C , y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D .
6. a) [1 punto] Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.
- b) [1,5 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

7. a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x - 4}$.
- b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si } x > 3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

8. a) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.
- a.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?
- a.2) [0,75 puntos] Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?
- b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.
- b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?
- b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	k \ P									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

RESOLUCIÓN ORDINARIA 2021 MATEMÁTICAS II

JUNIO 2021

1.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+1) - (2) = 1$$

$$b) \quad X \cdot A + 3 \cdot A = B$$

$$XA = B - 3A$$

$$X = (B - 3A) \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1} - 3I$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} |1^+ 1^+| & |0^- 1^+| & |0^+ 1^+| \\ |1^- 2^-| & |2^+ 2^+| & |2^- 1^-| \\ |1^+ 2^+| & |2^- 2^-| & |2^+ 0^-| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3I = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

2.)

$$a) \quad \begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ ax + z = a - 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a + 1 + 1 - a = -2a + 2 \quad -2a + 2 = 0 \quad a = 1 \rightarrow \text{Rg } M \leq 2$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - a + 1 - a - 1 - a + 1 = -3a + 4 \quad -3a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4}{3}$$

• Para $a = 1$, $\text{Rg } M = 2 \neq \text{Rg } M^* = 3 \rightarrow \text{SI}$

• Para $a \neq 1$, $\text{Rg } M = 3 = \text{Rg } M^* = \text{nº incógnitas} \rightarrow \text{SCD}$

b) $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad |M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1 + 3 + 1 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Sol: } (3, -1, 1)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1 + 1 + 1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

3.)

$$a) \int \frac{2}{3+e^x} dx = \int \frac{2}{3+t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{2}{(3+t)t} dt = \int \frac{-2/3}{3+t} dt + \int \frac{2/3}{t} dt =$$

$$\begin{array}{l} \text{c.v.: } e^x = t \\ e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{2}{(3+t)t} = \frac{A}{3+t} + \frac{B}{t} \\ 2 = At + B(3+t) \\ t=0 \rightarrow 2 = 3B ; B = 2/3 \\ t=-3 \rightarrow 2 = -3A ; A = -2/3 \end{array} \right|$$

$$= -\frac{2}{3} \ln(3+t) + \frac{2}{3} \ln t = -\frac{2}{3} \ln(3+e^x) + \frac{2}{3} \ln(e^x) + C$$

$$b) \int \frac{-x+1}{x^2+3} dx = \int \frac{-x}{x^2+3} dx + \int \frac{1}{x^2+3} = -\frac{1}{2} \ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\rightarrow \int \frac{-x}{x^2+3} = -\frac{1}{2} \ln(x^2+3) + C$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{x^2+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\frac{x^2}{3}+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2+1} dx = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \int \frac{1/\sqrt{3}}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2+1} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

4.)

$$a) P(1,0,1)$$

$$R(-1,0,1)$$

$$d(P,R) = \frac{|\vec{v}_r \times \vec{RP}|}{|\vec{v}_r|}$$

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\vec{v}_r(1,1,-1)$$

$$\vec{RP}(2,0,0)$$

$$\vec{v}_r \times \vec{RP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-\vec{j} - \vec{k}) = -2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|\vec{v}_r \times \vec{RP}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$d(P,R) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$b) s: \begin{cases} x=0+2\lambda \\ y=1-2a\lambda \\ z=0+2\lambda \end{cases} \quad t: \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

$$S(0,1,0)$$

$$T(1,-1,2)$$

$$\vec{v}_s(2,-2a,2)$$

$$\vec{v}_t(a,-1,1)$$

Para que sean paralelas $\vec{v}_t$ y $\vec{v}_s$ deben ser linealmente dependientes:

$$\vec{v}_s \times \vec{v}_t = 0 \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2a & 2 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2a\vec{i} - 2\vec{k} + 2a\vec{j}) - (-2a^2\vec{k} - 2\vec{i} + 2\vec{j}) =$$

$$= -2a\vec{i} + 2\vec{i} + 2a\vec{j} - 2\vec{j} - 2\vec{k} + 2a^2\vec{k} = 0$$

$$\begin{cases} -2a\vec{i} = -2\vec{i} \\ 2a\vec{j} = 2\vec{j} \\ -2\vec{k} = -2a^2\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1} \text{ r y s son paralelas cuando } a=1$$

5.)

a) A(0,0,1) B(2,1,0) C(1,1,1) D(1,1,2)

$\vec{AB} = (2, 1, -1)$ $\vec{AD} = (1, 1, 1)$

$\vec{AC} = (1, 1, 0)$

$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$ $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1) - (-1+1) = 1$

$V = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6} u^3$

b)

$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(z-1) - y - (z-1-x) = 2z-2-y-z+1+x =$

$= x - y + z - 1 = 0$

$\pi: x - y + z - 1 = 0$

$P_r = D(1,1,2)$

$r: (x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(1, -1, 1)$

$\vec{v}_r = \vec{n}(1, -1, 1)$

$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

6.) a) $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ P(1,2) Pte. tg. en $x=1 \rightarrow 1$

① Para que pase por ese punto se debe cumplir que $f(1) = 2$

$f(1) = a - 2 - 1 + b = a + b - 3$ 1) $a + b - 3 = 2$
 $a + b = 5$

② La pendiente de la recta tg es la derivada, por lo que $f'(1) = 1$

$f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1$ 2) $3a - 5 = 1$

$f'(1) = 3a - 4 - 1 = 3a - 5$

$3a = 6 \rightarrow a = 2$

1) $a + b = 5$

$2 + b = 5 \rightarrow b = 3$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$ - Para que sea continua: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$
- Para que sea derivable: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0)$

CONTINUIDAD $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - ax + 1 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} be^x = b$

$f(0) = b$

$b = 1$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$

DERIVABILIDAD $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2x - a = -a$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} be^x = b = 1$

$f'(0) = b = 1$

$-a = 1 \rightarrow a = -1$

7.) a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x - 4} = \frac{0}{0} \text{ IND} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}}{2} = \frac{1}{2}$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dom } f(x)_1 = \mathbb{R} \\ \text{Dom } f(x)_2 = \mathbb{R} - \{2\} \\ \text{Dom } f(x)_3 = \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$$

CONTINUIDAD $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{2-1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$f(1) = \frac{2(1)-1}{(1)-2} = -1$$

↓
continua en $x=1$

CONTINUIDAD $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{3}{0} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{+}{+} = +\infty$$

↓
A.V. (discontinuidad de salto infinito) en $x=2$

CONTINUIDAD $x=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{6-1}{3-2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 2e^x = 2e^3$$

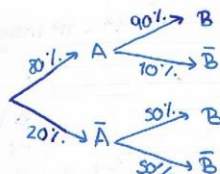
$$f(3) = \frac{2(3)-1}{3-2} = \frac{5}{2}$$

↓
Discontinuidad de salto finito en $x=3$

8.)

A: Comparte $P(A) = 80\%$
 $\bar{A}$: No comparte $P(\bar{A}) = 20\%$
 B: Comenta $P(\bar{A}|B) = 50\%$
 $\bar{B}$: No comenta $P(A \cap B) = 90\%$

a1)



$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0.8 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.5 = \underline{0.82}$$

$$a2) P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.18} = \underline{0.44}$$

$$b) p = 0.8 \quad q = 0.2 \quad n = 4$$

$$b1) P(x=4) = \binom{4}{4} (0.8)^4 \cdot (0.2)^0 = \underline{0.4096}$$

$$b2) P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \left[\binom{4}{0} (0.8)^0 \cdot (0.2)^4 \right] = \underline{0.9984}$$