ALBACER
ACADEMIA DE ESTUDIOS

Evaluación para el acceso a la Universidad

Curso 2021/2022 (Convocatoria Extraordinaria)

**Materia: Matemáticas II**

1. a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = a+1 \\ ax + z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a+1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3a + 2 - 1 - 4a = -a + 1$$

$-a + 1 = 0 \longrightarrow \boxed{a = 1}$

$Rg A = 3$ para $a \neq 1$ ; $Rg A = 2$ para $a = 1$

$\underline{a = 1}$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & a+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$Rg A^* = 2$ para $a = 1$

- Para $a \neq 1$ $Rg A = Rg A^* = n^o\ incog = 3 \longrightarrow$ SCD
- Para $a = 1$ $Rg A = 2 = Rg A^* \neq n^o incog \longrightarrow$ SCI

b) $\boxed{a = 1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) F_3 = 2F_3 - F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$\boxed{z = \lambda}$

$-2y - 2\lambda = -2$

$y = \dfrac{-2 + 2\lambda}{-2}$

$\boxed{y = 1 - \lambda}$

$x + 2y + 3z = 2$

$x + 2(1-\lambda) + 3\lambda = 2$

$x + 2 - 2\lambda + 3\lambda = 2$

$\boxed{x = -\lambda}$

$\boxed{Sol(-\lambda, 1-\lambda, \lambda)}$

2. a) $f(x) = \dfrac{ax+1}{2x+b}$

• Para que tenga A.V. en $x = 1$

$2x + b = 0$

$2 + b = 1$

$\boxed{b = -2}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax+1}{2x-2} = \dfrac{a+1}{0} = \boxed{\pm\infty}$

• Para que tenga A.H. en $y = 2$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax+1}{2x-2} = \dfrac{\infty}{\infty} \text{ IND} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{2}$

$\dfrac{a}{2} = 2 \longrightarrow \boxed{a = 4}$

b) $\int x \cdot \cos 2x \, dx = \dfrac{x \,\text{sen}\, 2x}{2} - \int \dfrac{\text{sen}\, 2x}{2} dx = \boxed{\dfrac{x \,\text{sen}\, 2x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{4} + c}$

$u = x \qquad dv = \cos 2x \, dx$

$du = dx \qquad v = \dfrac{\text{sen}\, 2x}{2}$

3. a) $f(x) = \dfrac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x}$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$\boxed{x = 0} \quad \boxed{x = 2}$

Dom $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

$x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x} = \dfrac{14}{0} \text{ IND} = \dfrac{+}{+} = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x} = \dfrac{14}{0} \text{ IND} = \dfrac{+}{-} = \boxed{-\infty}$

Discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 0$

$x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x} = \dfrac{0}{0} \text{ IND} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4xe^{x^2-4} - 8}{2x - 2} = \dfrac{0}{2} = \boxed{0}$

* Discontinuidad evitable en $x = 2$

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \underset{①}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{②}{=} -2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{③}{=} -2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \overbrace{\begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}^{0} \underset{④}{=} \boxed{-4}$$

① Fila 3 multiplicada por un factor común, extraemos el factor para multiplicar al determinante.

② Permutamos $F_1 \longleftrightarrow F_3$, cambiamos signo del determinante

③ $F_2$ es la suma de dos factores, separamos en la suma de los determinantes de las matrices.

④ $F_2$ es una combinación lineal de $F_3$, por tanto el determinante vale 0.

4. $A(1,0,1) \quad \pi \equiv x+y+z=8$

a) $\vec{n} = (1,1,1)$

$A = (1,0,1)$

$$\boxed{r = \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}}$$

* Utilizamos el vector normal del plano para que r sea $\perp$ a este, y el punto dado

Pto. de corte $\longrightarrow \boxed{(3,2,3)}$

$1+\lambda+\lambda+1+\lambda = 8$

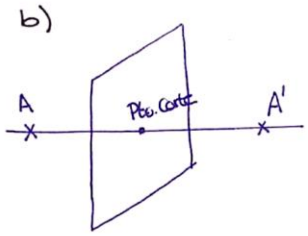
$3\lambda+2 = 8$

$3\lambda = 6$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$P = \begin{cases} x = 1+2 = 3 \\ y = 2 \\ z = 1+2 = 3 \end{cases}$$

b)




El punto de corte de la recta con el plano es el punto medio del segmento formado entre A y su simétrico.

$$M = \left( \frac{A_x + A'_x}{2}, \frac{A_y + A'_y}{2}, \frac{A_z + A'_z}{2} \right)$$

$\frac{1 + A'_x}{2} = 3 \qquad \frac{0 + A'_y}{2} = 2 \qquad \frac{1 + A'_z}{2} = 3$

$\boxed{A'_x = 5} \qquad \boxed{A'_y = 4} \qquad \boxed{A'_z = 5}$

$\boxed{A'(5,4,5)}$

5.

a) $\pi \equiv x-3y+z=0 \qquad A(0,0,-1) \quad B(1,1,1)$

$\vec{n}(1,-3,1)$

$\vec{AB}(1,1,2)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6x+z+1+y+3(z+1)-x-2y =$$

$$= -6x+z+1+y+3z+3-x-2y = -7x-y+4z+4$$

$$\boxed{\pi' \equiv -7x-y+4z+4=0}$$

b) $f(x)=x^2-4x+5 \qquad g(x)=3-x$

1. Punto de corte.

$x^2-4x+5 = 3-x$

$x^2-3x+2=0$

$\boxed{x=2} \quad \boxed{x=1}$

2. Posición relativa

$f(1'5) = 5/4$

$g(1'5) = 3/2$

$f(x) \rightarrow$ suelo

$g(x) \rightarrow$ techo

3. Área

$$A = \int_1^2 g(x)-f(x) = \int_1^2 3-x-x^2+4x-5 \, dx = \int_1^2 -x^2+3x-2 \, dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right)_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{8}{3}+6-4\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right) = -\frac{2}{3}+\frac{5}{6} = \boxed{\frac{1}{6}\ u^2}$$

6.

a) $A(a,0,1) \quad B(1,3,0) \quad C(0,1,0) \quad D(1,1,1)$

$\vec{AB} = (1-a, 3, -1)$

$\vec{AC} = (-a, 1, -1)$

$\vec{AD} = (1-a, 1, 0)$

$$V = \frac{|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]|}{6}$$

$$[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}] = \begin{vmatrix} 1-a & 3 & -1 \\ -a & 1 & -1 \\ 1-a & 1 & 0 \end{vmatrix} = a-3(1-a)+(1-a)+(1-a) =$$

$$= a-3+3a+1-a+1-a = 2a-1$$

$$\frac{2a-1}{6} = 1 \rightarrow \boxed{a = 7/2}$$

b) $f(x) = \dfrac{(2e^x - 8x - 3)}{x^2+2}$

T. Bolzano: Si dos puntos de la función continua $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ están situados en diferentes lados del eje X, entonces, la gráfica corta al eje en algún punto entre a y b.

$$f(x) = \begin{cases} \text{- continua en } [a,b] \\ \text{- Derivable en } (a,b) \\ \text{- Signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \end{cases} \longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$$

Continuidad $\rightarrow$ continua en $\mathbb{R}$

$x^2 + 2 = 0$

$x = \nexists$

Derivabilidad $\rightarrow$ Derivable en $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(2e^x - 8)(x^2+2) - (2e^x - 8x - 3)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$

$$f(1) = \frac{2 \cdot e^1 - 8 - 3}{1+2} = -1{,}85$$

$$f(-1) = \frac{2e^{-1} + 8 - 3}{1+2} = 1'91$$

⊛ $f(x)$ corta al eje de abscisas al menos una vez en $(-1, 1)$

7.

a) $AX + B = X$

$AX - X = -B$

$(A - I)X = -B$

$(A-I)^{-1}(A-I)X = (A-I)^{-1}(-B)$

$X = (A-I)^{-1}(-B)$

$-B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A - I| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$\text{Adj}(A-I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +1 & 2 \end{pmatrix}$

$\text{Adj}(A-I)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(A-I)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

b) $p = 0'6$ $\quad q = 0'4$ $\quad n = 4$

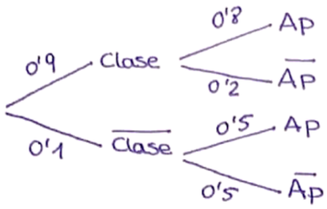
$$P(x \geq 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - (P(x=0) + P(x=1)) =$$

$$= 1 - \left(\binom{4}{0}(0'6)^0(0,4)^4 + \binom{4}{1}(0,6)^1(0,4)^3\right) =$$

$$= 1 - (0,0256 + 0'1536) = 0'8208 \longrightarrow \boxed{82,08\%}$$

8.

a)



a.1.) $P(Ap) = P(Clase \cap Ap) + P(\overline{Clase} \cap Ap) =$

$= 0'9 \cdot 0'8 + 0'1 \cdot 0'5 = \boxed{0'77}$

a.2.) $$P(\overline{Clase}/\overline{Ap}) = \frac{P(\overline{Clase} \cap \overline{Ap})}{P(\overline{Ap})} = \frac{0'1 \cdot 0'5}{1 - 0'77} = \frac{0'05}{0'23} = \boxed{0'217}$$

b) $N(150, 5)$

b.1.) $$P(x > 152) = P(z > 0'4) = 1 - P(z < 0'4) = 1 - 0'6554 = 0'3446$$

$$z = \frac{152 - 150}{5} = 0'4$$

$\downarrow$

$\boxed{34'46\%}$

b.2.) $$P(149 < x < 152) = P(-0'2 < z < 0'4) = P(z < 0'4) - P(z < -0'2) =$$

$$z_1 = \frac{149 - 150}{5} = -0'2$$

$$z_2 = \frac{152 - 150}{5} = 0'4$$

$$= P(z < 0'4) - (1 - P(z < 0'2)) =$$

$$= 0'6554 - (1 - 0'5793) = 0'6554 - 0'4207 =$$

$$= 0'2347 \longrightarrow \boxed{23'47\%}$$