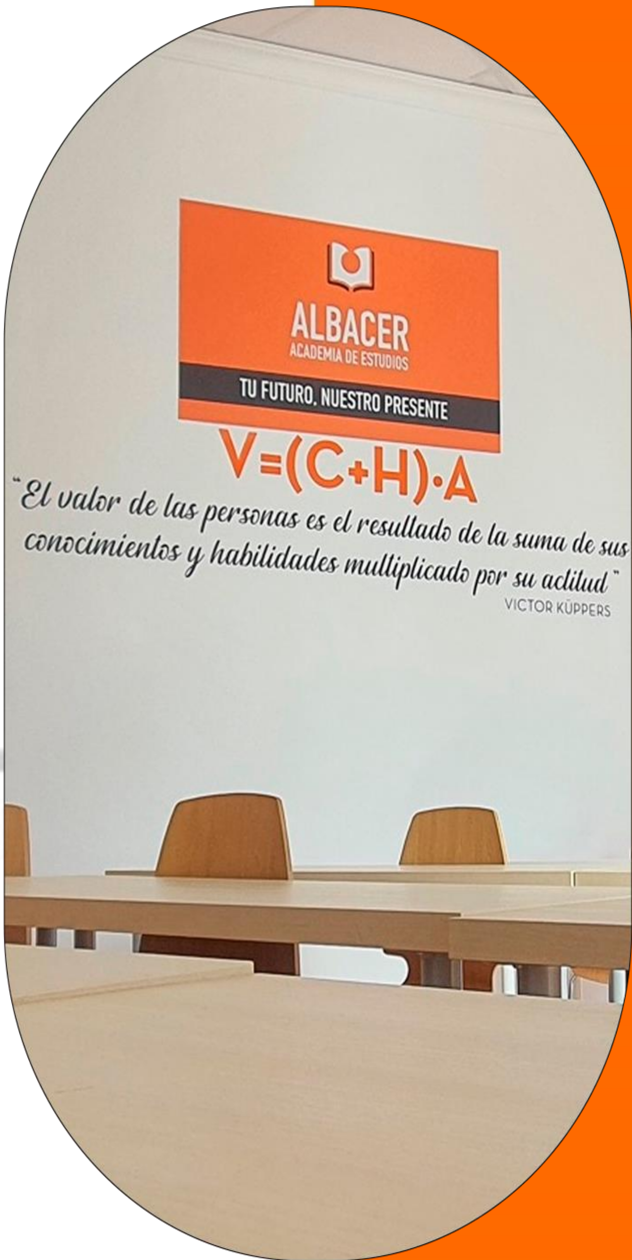
ALBACER
ACADEMIA DE ESTUDIOS

# PAU 2025

## Examen Matemáticas CCSS

## Soluciones

Matemáticas CCSS



**Ejercicio 1.-** Un centro de atención telefónica estima que el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe se aproxima por una distribución normal con desviación típica $\sigma = 4$ minutos. Se toma una muestra de 36 llamadas y se observa que el tiempo medio de atención es de 15 minutos. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el tiempo de atención medio poblacional. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

c) Una asociación de consumidores afirma que el tiempo medio de atención a las llamadas es de 17 minutos. Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |

a) La media poblacional sigue una distribución estadística tal que $X \sim N\left(\mu = 15,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{36}} \approx 0{,}67\right)$ para un tamaño muestral de $n = 36$. El intervalo de confianza para un nivel del 0,97 viene dado por.

$$IC = (\bar{x} - E\,, \bar{x} + E)\ ;\ \ E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$ buscamos en la tabla de distribución el valor $(NC + 1)/2\ = 0{,}985\ \rightarrow\ z_{\alpha/2}\ = 2{,}17$. Por lo que se obtiene:

$$E\,=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 1{,}45\ \ ;\ \ \ IC = (13{,}55\,, 16{,}45)$$

b) Sin modificar el nivel de confianza, reducir la amplitud del intervalo es equivalente a disminuir el error, que se puede conseguir, como se aprecia en la fórmula, aumentando el tamaño de la muestra.

c) Con un 97% no es admisible esta afirmación, ya que el tiempo medio de 17 minutos se encuentra fuera de nuestro IC, por lo que no podemos afirmar este resultado. Para un nivel de confianza del 95% el IC es todavía mas pequeño (ya que el error disminuye con el nivel de confianza), por lo que tampoco quedaría dentro del nuevo IC y seguiría sin ser admisible.

**Ejercicio 2.-** Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? **(2.5 puntos)**

Planteamos el sistema, teniendo en cuenta que "x, y, z" son las puntuaciones obtenidas en el primero, segundo y tercer enunciado.

De la primera condición de la nota total se obtiene:

$$x + y + z = 7{,}2$$

De la segunda condición entre las puntuaciones:

$$x = 1{,}4y \rightarrow \; x - 1{,}4y = 0$$

De la tercera relación:

$$z = 2(x + y) \rightarrow \; 2x + 2y - z = 0$$

Obteniendo un sistema, que resolveremos sustituyendo el valor de la x en la primera y tercera ecuación. Seguidamente por reducción obtenemos el valor de la segunda incógnita y despejamos en las ecuaciones anteriores.

$$\begin{cases} x + y + z = 7{,}2 \\ x - 1{,}4y = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} 2{,}4y + z = 7{,}2 \\ 4{,}8y - z = 0 \end{array} \rightarrow 7{,}2y = 7{,}2 \; \rightarrow \; y = 1$$

$$x = 1{,}4 \;\; ; \;\; z = 4{,}8$$

**Ejercicio 3.-** Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

**Apartado a)** Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & si\ x \leq k \\ x^2 - 4x + 9 & si\ x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de $k$ la función $f(x)$ es continua en $x = k$ ? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

a.1) Para que la función sea continua (teniendo en cuenta que son polinomios y que no posee puntos de discontinuidad propios) en $x = k$, se debe cumplir la condición de continuidad:

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^+} f(x)$$

Sustituyendo en los trozos de la función adecuado se obtiene la ecuación que nos permite obtener el valor de k

$$\lim_{x \to k^-} -x^2 - 3x + 10 = \lim_{x \to k^+} x^2 - 4x + 9$$

$$-k^2 - 3k + 10 = k^2 - 4k + 9$$

$$2k^2 - k - 1 = 0 \rightarrow \ k_1 = 1 \ , \ k_2 = -1/2$$

a.2) Si $k = 1$ la función es continua y podemos estudiar la función de forma global. Calculamos la derivada de la función, y obtenemos los extremos relativos, en los cuales esta derivada se anula

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 3 & si\ x < 1 \\ 2x - 4 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Cada uno de los trozos nos da un valor donde podría ubicarse un extremo relativo

$$-2x - 3 = 0 \rightarrow \ x_1 = -3/2 \ < \ 1$$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 2 > 1$$

Como la segunda derivada es negativa para el primer trozo, para todo valor de x, nos encontramos ante un máximo en $x_1 = -3/2$, con valor $f(-3/2) = 12{,}25$ . Y con el segundo trozo ocurre, al contrario, es positiva para todo x, luego hay un mínimo en $x_2 = 2$ , con valor $f(2) = 5$

a.3) Teniendo esto en cuenta podemos definir los intervalos de crecimiento y decrecimiento como:

$$Crecimiento: (-\infty, -3/2) \cup (2, \infty)$$

$$Decrecimiento: (-3/2, 1) \cup (1{,}2)$$

Teóricamente no podemos incluir el punto $x = 1$, ya que la derivada no es continua en ese punto, luego no es derivable.

**Apartado b)** Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(2, -3)$ y un punto de inflexión en $(1, -1)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros $a, b$ y $c$. **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $X$ en la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde $I$ es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

b.1) Comenzamos por realizar las derivadas de la función:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \;; \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

Para que se cumplan las condiciones del enunciado, debemos comprobar lo siguiente:

- mínimo relativo en (2,-3):

$$f(2) = 8a + 4b + c = -3 \quad (I)$$

$$f'(2) = 12a + 4b = 0 \quad (II)$$

- punto de inflexión en (1,-1):

$$f(1) = a + b + c = -1 \quad (III)$$

$$f''(1) = 6a + 2b = 0 \quad (IV)$$

Esto nos da un sistema que podemos resolver de distintas formas, por ejemplo, despejando b de (IV) y sustituyendo en el resto $b = -3a$. Posteriormente reduciendo el sistema.

$$-4a + c = -3 \quad (I)$$

$$-2a + c = -1 \quad (III)$$

$$-2a = -2 \rightarrow \quad a = 1$$

$$b = -3 \;; \quad c = 1$$

b.2) Para este apartado comenzamos por despejar la X

$$ABX = CX + I \rightarrow \quad ABX - CX = I$$

$$(AB - C)X = I \rightarrow \quad X = (AB - C)^{-1}$$

Seguidamente realizamos los cálculos indicados:

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \;; \quad AB - C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (AB - C)^{-1} = \frac{adj(AB - C)^T}{|A|} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4.-** Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

**Apartado a)** Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**

a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0.5 puntos)**

a.1) La función estaría relacionada con el beneficio obtenido. Definiendo como variables el número de paquetes de cada tipo que se tienen que fabricar x: paquetes tipo A / y: paquetes tipo B.

$$B(x,y) = 20x + 17y$$

Las restricciones del problema están relacionadas con la cantidad máxima de tiempo de trabajo manual y de maquinas que se pueden realizar, que dependen de x e y. Respectivamente y expresado en minutos:

$$30x + 60y \leq 85 \cdot 60 = 5100 \quad (I)$$

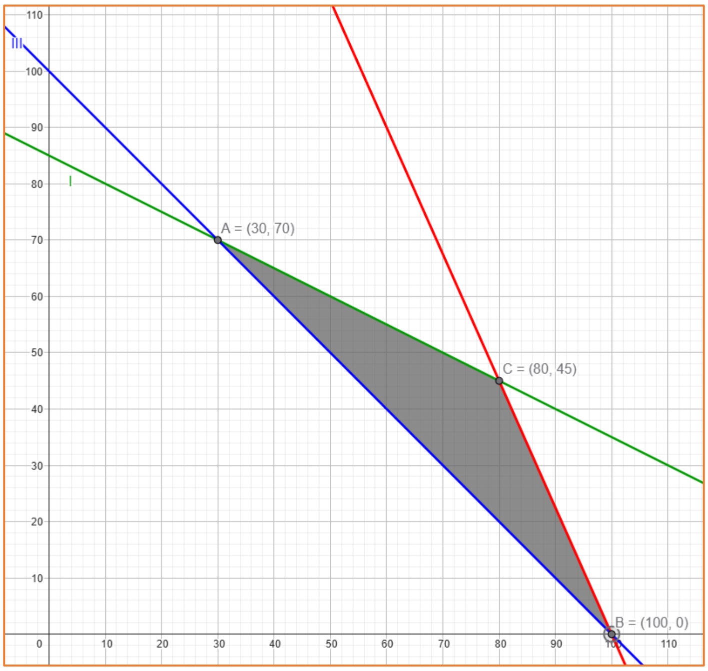
$$45x + 20y \leq 75 \cdot 60 = 4500 \quad (II)$$

Hay otra restricción relacionada con la cantidad mínima de paquetes que se deben enviar, además de las usuales:

$$x \geq 0 \ ; \quad y \geq 0$$

$$x + y \geq 100 \quad (III)$$

Representando el recinto definido por estas inecuaciones obtenemos la región de trabajo o región admisible.




a.2) Los tres vértices de la región admisible son aquellos en los que o bien el beneficio es máximo o mínimo. Comprobando las coordenadas de cada punto (que de forma analítica se obtienen resolviendo los sistemas entre cada una de las restricciones, pero que utilizaremos aquí observando la representación, ya que el cálculo de las coordenadas esta implícito en el apartado anterior, aunque no se pida).

$$A(30{,}70) \rightarrow \; B_A(30{,}70) = 1790$$

$$B(80{,}45) \rightarrow \; B_B(80{,}45) = 2365$$

$$C(100{,}0) \rightarrow \; B_C(100{,}0) = 2000$$

Luego para obtener un beneficio máximo es necesario fabricar 80 paquetes de tipo A y 45 de tipo B, obteniendo un beneficio de 2365€.

**Apartado b)** Se va a proceder a la selección de pilotos para una compañía de vuelos. Se realizan tres pruebas **independientes**: A (idiomas), B (conocimientos teórico-prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas y se sabe, por procesos realizados anteriormente, que el 10 % de los presentados superan la prueba A, la B, el 40 % y la C, el 20 %. Sabiendo que todos los candidatos realizan las tres pruebas, se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato pase la selección? **(0.5 puntos)**

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato no sea seleccionado por haber fallado en una sola prueba? **(0.5 puntos)**

b.3) Sabiendo que un candidato no ha sido seleccionado por haber fallado en una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B? **(0.25 puntos)**

b.4) Si la velocidad punta de la prueba física de carrera de 1000 m sigue una función de la forma: $V(t) = at^3 + bt^2 + t$ , con $t$ en minutos, y sabemos que alcanza el máximo en el instante $t = 1$ alcanzando, en ese instante, una velocidad de 150 m/min, encuentra los valores de los parámetros $a$ y $b$. **(1.25 puntos)**

b.1) Teniendo en cuenta que las tres pruebas son independientes, y con los datos del problema podemos escribir que para pasar la selección:

$$P(Pasar\ A \cap Pasar\ B\ \cap Pasar\ C) = P(pasar\ A) \cdot\ P(pasar\ B) \cdot P(pasar\ C)$$

$$P(superar\ prueba) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}008 = 0{,}8\%$$

b.2) Podemos calcular por separado la probabilidad de fallar una prueba para cada una de las pruebas, teniendo en cuenta el suceso opuesto, y después sumar las tres probabilidades.

$$P(Fallar\ A \cap Pasar\ B\ \cap Pasar\ C) = 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}072$$

$$P(Pasar\ A \cap Fallar\ B\ \cap Pasar\ C) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}012$$

$$P(Pasar\ A \cap Pasar\ B\ \cap Fallar\ C) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}032$$

$$P(Fallar\ por\ una\ prueba) = 0{,}072 + 0{,}012 + 0{,}032 = 0{,}116 = 11{,}6\%$$

b.3) Para este apartado se hace uso de la probabilidad condicionada (Teorema de Bayes), que se escribe como:

$$P(Fallar\ B\ |\ Fallar\ por\ una\ prueba) = \frac{P\ (Fallar\ B\ \cap\ Fallar\ por\ una\ prueba)}{P(Fallar\ por\ una\ prueba)}$$

Pero el término del numerador es lo mismo que decir que la única prueba que fallo es la prueba B, luego:

$$P(Fallar\ B \mid Fallar\ por\ una\ prueba) = \frac{P(Pasar\ A \cap Fallar\ B\ \cap Pasar\ C)}{P(Fallar\ por\ una\ prueba)}$$

$$P(Fallar\ B \mid Fallar\ por\ una\ prueba) = \frac{0{,}012}{0{,}116} \approx 0{,}103 = 10{,}3\%$$

b.4) Comenzamos por hallar la derivada de la función:

$$V'(t) = 3at^2 + 2bt + 1$$

Si sabemos que en $t = 1$ hay una máximo de la función, con valor $V(1) = 150$, podemos expresar estas condiciones como:

$$V(1) = a + b + 1 = 150$$

$$V'(1) = 3a + 2b + 1 = 0$$

Que podemos resolver de forma sencilla, por reducción, si multiplicamos la primera ecuación por 2 y restamos ambas.

$$3a - 2a + 2b - 2b + 1 - 2 = 0 - 300$$

$$a = -299 \quad ; \quad b = 448$$