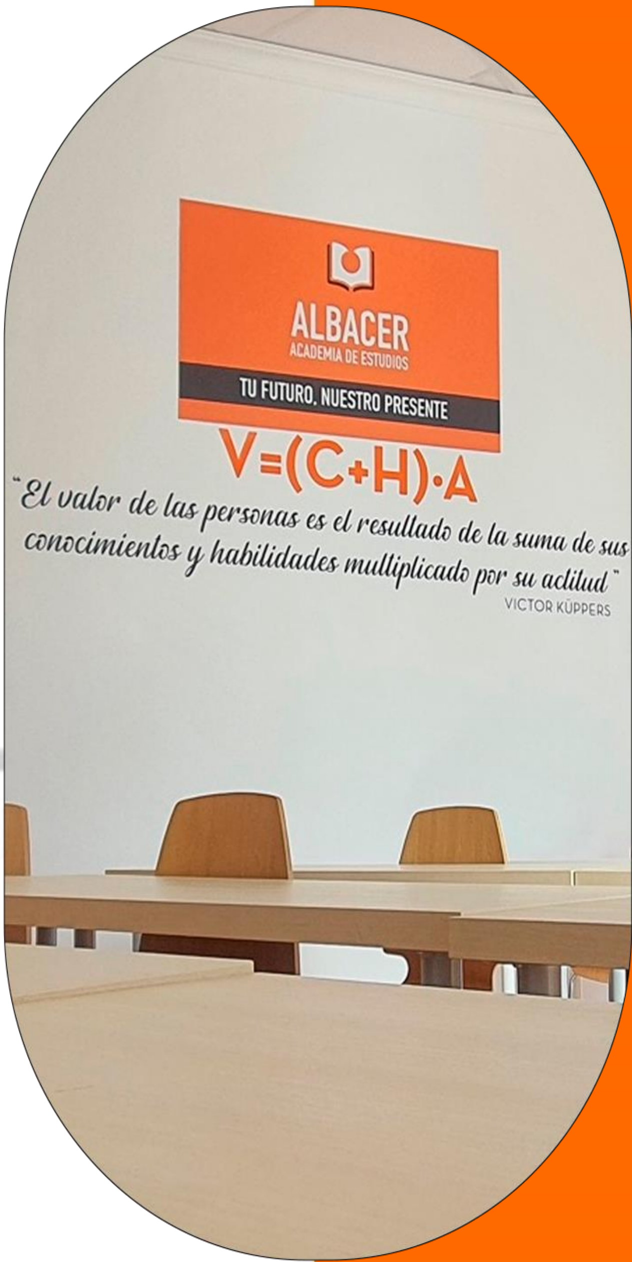
PAU 2025

Examen Física

Soluciones



Física

PROBLEMA 1.- (2.5 puntos) Nos encontramos en una nave espacial de masa $9 \cdot 10^4$ kg sobre la superficie del planeta Saturno. Sabemos que el radio de este planeta es de $5.82 \cdot 10^4$ km, su masa de $5.68 \cdot 10^{26}$ kg y su periodo de rotación de 10 horas y 34 minutos. Elige dos apartados a realizar:

a) (1.25 puntos) Calcula el valor de la gravedad en la superficie de Saturno y la velocidad que necesita la nave para abandonar el planeta. Deduce razonadamente las expresiones.

b) (1.25 puntos) Suponer que se lanza la nave verticalmente y sus motores se apagan justo cuando se encuentra a una altura de 2 veces el radio de Saturno sobre su superficie con velocidad de 1 km/s. Determinar a qué altura (en km) se parará antes de volver a caer sobre Saturno.

c) (1.25 puntos) Se quiere lanzar la nave para que orbite alrededor de este planeta de forma geoestacionaria (manteniéndose siempre en la vertical sobre un punto sobre la superficie del planeta). Deducir y calcular la altura a la que orbitará la nave.

Datos: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a) La gravedad se define como la aceleración que sufre un cuerpo causado por la fuerza de la gravedad. Haciendo uno de la segunda ley de Newton y la Ley de Gravitación universal, igualando y particularizando para los valores del enunciado obtenemos:

$$F = ma = G\frac{mM}{R^2} \rightarrow \quad a = g = G\frac{M}{R^2} = 11{,}18\, ms^{-2}$$

Recordamos que todas las unidades usadas en los enunciados deben convertirse a su unidad correspondiente del sistema internacional (SI).

Para la velocidad que necesita para escapar del planeta (llamada comúnmente velocidad de escape) es aquella que necesita el cuerpo para “llegar al infinito” con velocidad nula. Si utilizamos la conservación de la energía en este caso, entre la superficie del planeta y el infinito:

$$E_{m1} = E_{m2}$$

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{Mm}{R_\infty} = 0 \rightarrow \; v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Como se observa la energía en el infinito es nula por las condiciones impuestas, lo que nos permite despejar la velocidad de escape, la cual para los datos del problema obtenemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 36081\, ms^{-1}$$

b) De nuevo, haciendo uso de la conservación de la energía entre el punto de altura del doble del radio del planeta (lo que quiere decir a una distancia de tres veces el radio desde el centro) y donde calcularemos altura a la que llegaría la nave con velocidad nula.

$$E_{m1} = E_{m2}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{3 \cdot R} = -G\frac{M}{R_2}$$

$$R_2 = 1{,}75 \cdot 10^8\ m = 1{,}75 \cdot 10^5\ km$$

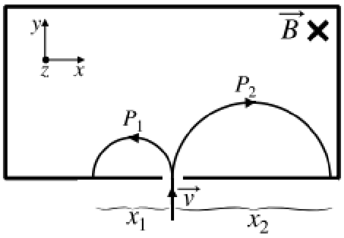
Teniendo en cuenta que en este radio se incluye el radio del planeta, la altura desde la superficie será:

$$h_2 = R_2 - R = 116800\ km$$

c) Haciendo uso de la Tercera Ley de Kepler, y teniendo en cuenta que una órbita geoestacionaria es aquella que posee como periodo el mismo que el de rotación del planeta, podemos escribir:

$$R_3 = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi}T^2} = 1{,}12 \cdot 10^8\ m\ ;\ h_3 = R_3 - R = 5{,}34 \cdot 10^4\ km$$

PROBLEMA 2.- (2.5 puntos) En un espectrómetro de masas, dos partículas cargadas, P1 y P2, de masas iguales m = $5\cdot10^{-6}$ kg, entran en una región donde existe un campo magnético uniforme perpendicular (B = 0.50 T) orientado según se indica en la figura (el aspa indica que $\vec{B}$ entra hacia dentro de la hoja). A su entrada, las dos partículas tienen la misma velocidad, v = 100 m/s. Una vez dentro, las partículas se separan siguiendo las trayectorias semicirculares indicadas, siendo x_1 = 10 cm (partícula P1) y x_2 = 40 cm (partícula P2). Elige dos apartados a realizar:



a) (1.25 puntos) Explicar razonadamente el signo de la carga de cada partícula y determinar el valor de dichas cargas.

b) (1.25 puntos) Calcular la aceleración debida a la fuerza magnética que actúa sobre cada una de las partículas y determinar el tiempo invertido por las partículas en recorrer su respectiva trayectoria semicircular.

c) (1.25 puntos) En este experimento se tiene la posibilidad de incluir un campo eléctrico dentro de la parte recuadrada. Especificar el vector campo eléctrico para que las partículas al entrar en el recuadro sigan una trayectoria rectilínea y no se desvíen.

a) Para comprender la diferencia de la dirección de giro de la partícula debemos relacionar ese giro con la dirección de una fuerza centrípeta, generada por la Fuerza de Lorentz, cuya expresión es:

$$F = qv \times B$$

Como se observa la fuerza apuntará hacia el centro del círculo, dado por el producto vectorial de la velocidad y el campo. Podemos demostrar la dirección si elegimos las direcciones de los vectores de acuerdo con el sistema de referencia mostrado:

$$v = 100\, j \;\; ; \quad B = 0{,}5\, k$$

$$v \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 50\, i$$

Luego la fuerza debería ir hacia la derecha en el caso de las cargas positivas que mantienen este signo (Caso P2) y a la izquierda en el caso de las cargas negativas (Caso P1). Si queremos calcular la carga debemos igualar esta fuerza a la Segunda Ley de Newton para una fuerza centrípeta. Despejando y sustituyendo los datos para cada carga obtenemos el resultado.

$$F_c = m\frac{v^2}{R} = qvB \rightarrow \;\; q = \frac{mv}{RB} =$$

Caso P1 ($R_1 = x_1/2 \ = 5cm = 0{,}05m$): $q_1 = 0{,}02\ C$

Caso P1 ($R_2 = x_2/2 \ = 20cm = 0{,}2m$): $q_1 = 0{,}005\ C$

b) La aceleración es centrípeta como ya se ha comentado, y viene dado por la siguiente expresión

$$a_c = \frac{v^2}{R} \rightarrow \ a_{c1} = 2 \cdot 10^5\ ms^{-2}\ ;\ a_{c2} = 5 \cdot 10^4\ ms^{-2}$$

El tiempo invertido en recorrer la semicircunferencia equivale al semiperiodo del movimiento de giro (un periodo corresponde a un giro completo). Teniendo esto en cuenta:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$$

$$t_1 = \frac{T_1}{2} = 1{,}57 \cdot 10^{-3}\ s\ ;\ t_2 = \frac{T_2}{2} = 6{,}28 \cdot 10^{-3}\ s$$

c) Si no se produce un desvío de las partículas será debido a que la suma de todas las fuerzas es equivalente a cero. Esto ocurrirá si el campo eléctrico produce una fuerza en sentido contrario a la de Lorentz.

$$F_e = -F_m$$

$$qE = -q(v \times B)\ ;\ |E| = |v||B|$$

Mientras que la relación de módulos es simplemente la multiplicación mostrada, el signo menos nos indica que debe llevar dirección opuesta a el producto vectorial, que recordemos que tenía dirección +i. Por ello el campo necesario para cumplir la condición será

$$E = -50\ i\ \ N/C$$

Observemos como este campo no depende del signo de la carga, sino que es global para ambas. Esto es debido a que producirá una fuerza en la carga positiva hacia la izquierda y una en la carga positiva hacia la derecha, tendiendo ambas a corregir sus trayectorias hasta rectificarlas.

PROBLEMA 3.- (2.5 puntos) A una distancia de 5 cm a la izquierda de una lente divergente de 10 dioptrías de potencia, se sitúa un objeto de 10 cm de altura. Elige dos apartados a realizar:

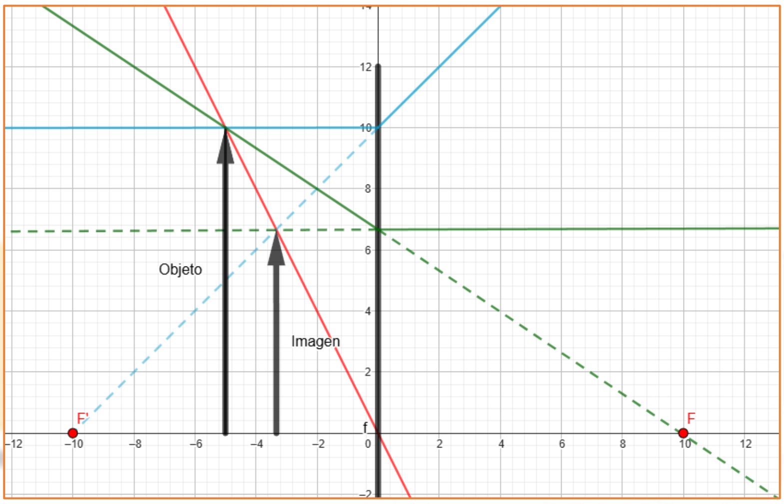
a) (1.25 puntos) Realizar un trazado de rayos para localizar la posición y el tamaño de la imagen, explicando las reglas de trazado para los rayos que uses. Indica las características de la imagen.

b) (1.25 puntos) Determinar numéricamente la posición de la imagen y su tamaño, así como el aumento lateral de este sistema óptico.

c) (1.25 puntos) Si sustituimos la lente por una lente convergente con la misma potencia, calcular la posición de la imagen y su tamaño. Realizar un trazado de rayos para ilustrarlo, indicando razonadamente si la imagen es real o virtual.

a) Debemos comenzar por conocer la distancia focal o distancia al foco de la lente, que se obtiene mediante la potencia con la relación:

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{10} = 0{,}1\, m = 10\, cm$$



Las reglas del trazado de rayos las podemos dividir en los tres rayos principales mostrados:

Rayo Rojo: Pasa por el objeto y el centro de la lente, no se desvía.

Rayo Azul: Pasa por el objeto de forma paralela al eje óptico (horizontal), y se desvía hacia F'. Al encontrarse a la izquierda de la lente, sería un rayo virtual, y el real diverge en la dirección contraria a la derecha.

Rayo Verde: Pasa por el objeto y F, sale de forma paralela, en este caso sin llegar a alcanzar el foco, formando una imagen virtual a la izquierda.

Se formará una imagen a la izquierda de la lente (virtual), derecha ya que posee la misma dirección que el objeto, y reducida al ser más pequeña que éste.

b) Para determinarlo numéricamente necesitamos hacer uso de la ecuación de la lente delgada, teniendo en cuenta que en las lentes divergentes (negativas) $f' = -10\ cm$ y que la distancia al objeto es positiva por ser real $d = +5cm$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} \rightarrow \quad d' = -\frac{10}{3} \approx -3{,}33\ cm$$

Para obtener su tamaño lo relacionamos con su aumento transversal:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{d'}{d} \rightarrow y' = +\frac{20}{3} \approx 6{,}67\ cm$$

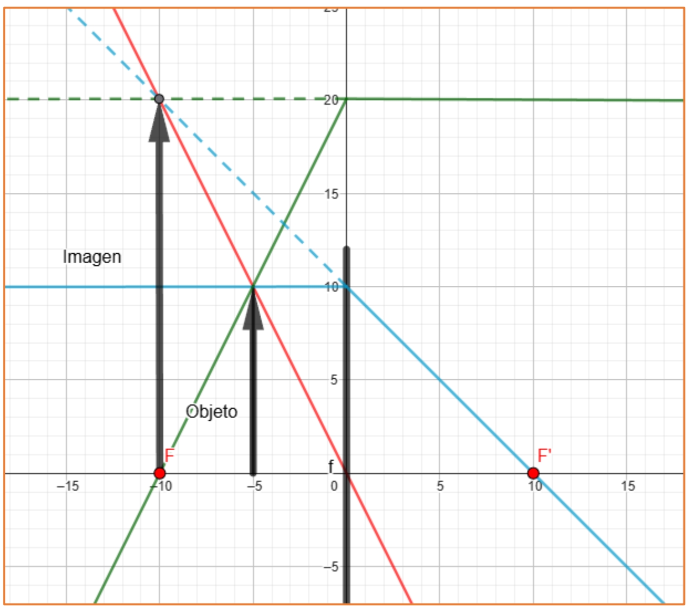
Como comprobamos ambos resultados son consistentes con el trazado.

c) En el caso de una lente convergente (positiva) la fórmula es la misma utilizada, con la divergente, pero esta vez $f' = +10\ cm$, con el resto de los datos invariantes.

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} \rightarrow \quad d' = -10cm$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{d'}{d} \rightarrow y' = 20\ cm$$

La imagen sería virtual, derecha y aumentada, por los mismos criterios mostrados en el apartado a). Podemos comprobar la veracidad de nuestras afirmaciones realizando el trazado de rayos.



CUESTIONES (2.5 puntos) Elegir 2 de las siguientes cuestiones:

a) (1.25 puntos) La función de trabajo de un electrodo de aluminio es de 4.08 eV. Determinar la frecuencia umbral de este metal para producir efecto fotoeléctrico y la energía cinética que tendrán los electrones emitidos si se ilumina con una radiación ultravioleta de 250 nm.
Datos: $h = 6.63\cdot10^{-34}$ J·s; $c = 3\cdot10^{8}$ m·s^{-1}; 1 eV = $1.6\cdot10^{-19}$ J

a) Este se trata de un problema del efecto fotoeléctrico, que puede relacionarse mediante la siguiente fórmula:

$$E_{fotón} = \phi + K_{electrón}$$

Donde ϕ representa la función de trabajo del metal y $K_{electrón}$ la energía cinética del electrón expulsado en el proceso. La frecuencia se puede obtener con la relación:

$$f_u = \frac{\phi}{h} = 9{,}84\cdot10^{14}\ Hz$$

Mediante la relación de la energía de un fotón en función de su longitud de onda se puede obtener la energía cinética del electrón saliente:

$$K_{electrón} = E_{fotón} - \phi\ ;\ \ E_{fotón} = h\cdot f = \frac{hc}{\lambda}$$

$$K_{electrón} = \frac{hc}{\lambda} - \phi = 1{,}428\cdot10^{-19}\ J$$

Recordamos de nuevo la necesidad de pasar todas las unidades al sistema internacional (SI) para obtener cálculos consistentes.

b) (1.25 puntos) Dos esferas conductoras, de radios R_1 = 90 cm y R_2 = 45 cm, están cargadas de modo que sus superficies están a un potencial, respecto del infinito, de V_1 = 10 V y V_2 = 20 V, respectivamente. Las esferas se encuentran en una zona del espacio vacío y con sus centros separados a gran distancia. Calcula la carga que quedará en cada esfera si ambas se unen mediante un conductor de capacidad despreciable.

Datos: $K = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$

b) Inicialmente antes del contacto, podemos calcular la carga de cada esfera mediante la relación:

$$V = K\frac{Q}{R} \rightarrow Q = \frac{RV}{K}\ \ ;\ Q_1 = Q_2 = 1 \cdot 10^{-9} = 1\,nC$$

Tras el contacto se tienen que cumplir dos condiciones: 1. Que el potencial sea igual en ambas esferas, 2. Que la cantidad total de carga sea la misma que antes del contacto. Traduciendo esto a ecuaciones obtenemos un sistema que nos permite resolver las cargas finales:

$$V_1' = V_2' \rightarrow \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} \rightarrow \frac{Q'_1}{0{,}9} = \frac{Q'_2}{0{,}45}$$

$$Q'_1 + Q_2' = Q_1 + Q_2 = 2\,nC$$

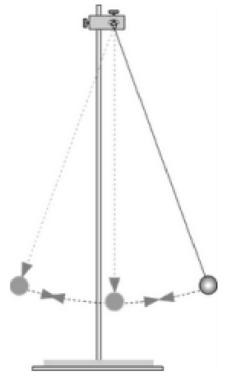
$$Q'_1 = 1{,}33\,nC\ ;\ \ Q_2' = 0{,}67\,nC$$

c) (1.25 puntos) En el laboratorio del instituto se mide el tiempo que tarda un péndulo simple en describir oscilaciones de pequeña amplitud, con el fin de determinar el valor de la aceleración de la gravedad. Responder a las siguientes cuestiones:

c.1) Si se repite la experiencia con otra bola de masa distinta, ¿se obtendrán los mismos resultados? ¿Por qué?

c.2) ¿Qué longitud debería tener el hilo para que el periodo fuera el doble del obtenido?

c.3) En la luna, donde la gravedad viene a ser 6 veces menor que en la Tierra ¿Cuál sería el periodo de un péndulo, si en la Tierra su periodo es de 2 segundos?



c.1) Sí, se obtendrían los mismos resultados. Esto es debido a que para pequeñas oscilaciones el giro es provocado por el peso del objeto, que podemos escribir, relacionando con la segunda Ley de Newton como:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = P = mg \rightarrow \frac{v^2}{R} = g$$

Para obtener el periodo tenemos en cuenta que $v = \omega R$, $\omega = 2\pi/T$ y que en el caso del péndulo $R = L$, siendo la longitud del péndulo:

$$\frac{v^2}{L} = g \rightarrow \quad \omega^2 R = g \rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L = g$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Que es la relación del periodo del péndulo simple y no depende de la masa, como se puede observar.

c.2) De la relación anterior observamos que al despejar L el periodo se encuentra elevado al cuadrado, luego será necesaria una longitud.

$$L' = g\frac{(2T)^2}{4\pi^2} = 4g\frac{T^2}{4\pi^2} = 4L$$

c.3) Realizando un método semejante al anterior con el caso del periodo obtenemos:

$$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T/6}} = \sqrt{6}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}} = \sqrt{6}T_T \approx 4{,}9\ s$$