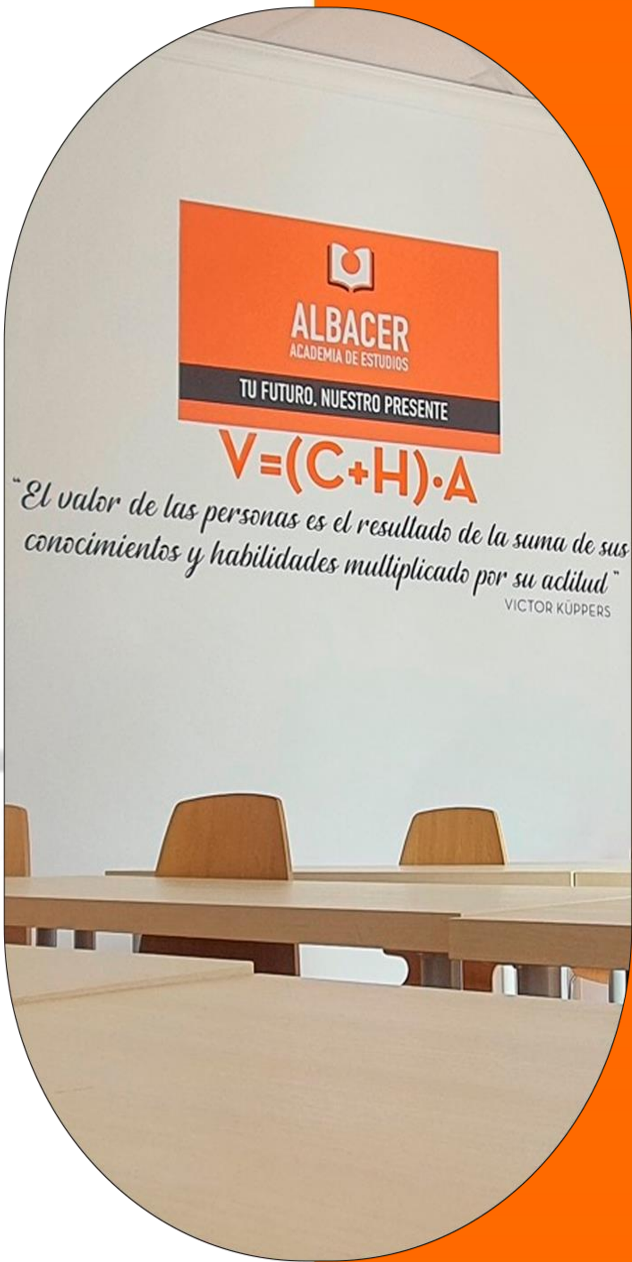
ALBACER
ACADEMIA DE ESTUDIOS

PAU 2025

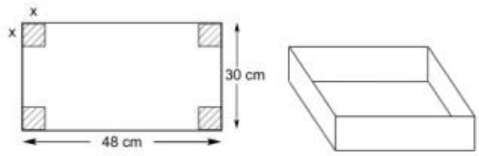
Examen Matemáticas II

Soluciones Julio

Matemáticas II: Julio 2025



EJERCICIO 1. **(2,5 PUNTOS)** Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



a) **[0,75 puntos]** Determina el volumen de la caja.

b) **[1 punto]** Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.

c) **[0,75 puntos]** Para poder trasportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas $f(t) = t^2 - 4t$ y $g(t) = 2t - 5$. Calcula el área de una de las aberturas.

a) El volumen de la caja vendrá dado por la fórmula de un prisma de basa rectangular, que una vez plegado podemos ver que se corresponde con:

$$\acute{A}rea\ Base = Lado_{corto} \cdot Lado_{largo} = (30 - 2x)(48 - 2x)$$

$$Altura = x$$

$$Volumen = V(x) = x(30 - 2x)(48 - 2x) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x\ u^3$$

b) Si queremos encontrar las dimensiones para las que el volumen sea máximo deberemos encontrar el valor en el que la derivada se anula, esto es:

$$V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440 = 12(x - 20)(x - 6) = 0$$

Obtenemos dos soluciones para nuestra condición $x_1 = 6\ y\ \ x_2 = 20$, que cumplen que son extremos relativos de la función. Sin embargo, para el valor $x_2 = 20$ el valor del lado corto de la base $(30 - 2x)$ sería negativo, lo cual no es posible. Para comprobar que, en efecto, el valor de $x_1 = 6$ es un máximo le damos valores para valores a la izquierda y derecha de este punto a la derivada.

$$V'(5) > 0\ ,\quad V'(7) < 0\ \rightarrow\quad M\acute{a}ximo\ en\ x_1 = 6\ cm$$

El valor de este volumen será:

$$V(6) = 3888\ cm^3$$

c) Para calcular el área encerrada entre dos curvas comenzamos por definir nuestra función auxiliar que representa la distancia entre ambas funciones.

$$h(x) = f(x) - g(x) = t^2 - 6t + 5$$

Es necesario que realicemos la integral entre los puntos de corte de Las dos funciones, que representa el área buscada. Para encontrar los límites de integraciones igualamos la función $h(x) = 0$ (la distancia es nula cuando las funciones se cortan). Utilizando la regla de Barrow calculamos la integral y nos aseguramos de que el valor sea positivo utilizando el valor absoluto.

$$h(t) = t^2 - 6t + 5 = 0 \rightarrow \ t_1 = 1\,, \qquad t_2 = 5$$

$$H(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t + C$$

$$A = \left| \int_1^5 h(x)dx \right| = H(5) - H(1) = \left| -\frac{25}{3} - \frac{7}{3} \right| = \frac{32}{3}\ u^2$$

EJERCICIO 2. **(2,5 PUNTOS)** Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo: $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

a.1) **[1 punto]** Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

a.2) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

a.3) **[0,75 puntos]** Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

a.1) Para comprobar que los puntos sean coplanarios, definimos tres vectores que parten hasta un punto hacia los otros tres, por ejemplo, BA, CA y DA. Si fuesen coplanarios el valor del producto mixto de éstos será nulo, lo que nos permite despejar m.

$$BA = (-1,-1,-2)\ ,\ \ CA = (0,1,-3)\ \ ,\ \ DA = (-1,1,-2-m)$$

$$[BA.CA,DA] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2-m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \ \ m = 6$$

a.2) Para definir el plano formado por estos puntos basta con encontrar su vector normal, que se corresponde con el producto vectorial de dos vectores contenidos en el plano, por ejemplo, el BA y CA:

$$n_\pi = AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (5,-3,-1)$$

Imponiendo que el plano contenga al punto A, por ejemplo, obtenemos la ecuación final del plano.

$$5x - 3y - z + d = 0 \rightarrow \ \ 5(-1) - 3(-1) - (-2) + d = 0$$

$$d = 1$$

$$\pi \equiv 5x - 3y - z + 1 = 0$$

a.3) Podemos calcular la distancia de este punto hasta el plano, que viene dado por la siguiente relación:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|n_\pi|} = \frac{|5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 3 + 1|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{36}} \approx 0{,}51\, m$$

Como consecuencia, el adorno floral no esta ubicado, ya que se encuentra a una distancia menor que 1m.

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

b.1) **[1 punto]** Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,-2)$, es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(0,4,-1)$ y perpendicular al plano $\pi \equiv -x+y+2z=1$.

b.2) **[1,5 puntos]** Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos $A(-1,2,3)$, $B(-1,0,-1)$, $C(2,-1,1)$ y $D(2,3,m)$, formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

b.1) Que el plano sea paralelo a una recta y perpendicular a otro plano es equivalente a afirmar que dos vectores del plano que buscamos serán v_r y n_π , por lo que su producto vectorial nos permitirá obtener el vector normal del plano que buscamos. Ya que la recta atraviesa dos puntos podemos calcular su vector director sin necesidad de tener su ecuación.

$$v_r = BA = (1,-4,4)\ ,\quad n_\pi = (-1,1,2)$$

$$n_{\pi'} = v_r \times n_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-12,-6,-3) \rightarrow \ n_{\pi'} = (4,2,1)$$

Si aplicamos la condición de que pase por el punto C, obtenemos la ecuación del plano:

$$4x+2y+z+d=0 \rightarrow \ 4\cdot 1+2\cdot 1+(-2)+d=0$$

$$d=-4$$

$$\pi' \equiv 4x+2y+z-4=0$$

b.2) Para cumplir la condición es necesario recordar la definición de volumen de un tetraedro, que se corresponde con un sexto, del producto mixto de los vectores que definen sus aristas, esto es:

$$AB=(0,-2,-4)\ ,\ \ AC=(3,-3,-2)\ ,\ \ AD=(3,1,m-3)$$

$$V_T = \frac{1}{6}[AB,AC,AD] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & m-3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-36+6(m-3)| = 8$$

$$|6m-54| = 48$$

$$m_1 = \frac{48-54}{-6} = 1\ ,\ \ m_2 = \frac{48+54}{6} = 17$$

Observemos que, por el enunciado, debemos calcular todos los valores posibles reales de m, por lo que debemos tener en cuenta el valor absoluto de la igualdad.

EJERCICIO 3. **(2,5 PUNTOS)** Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales. $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 4x+2y=a \\ ax+y+z=1 \end{cases}$.

a.1) **[1,5 puntos]** Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Para $a=0$, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

a.1) Pasamos el sistema a su forma matricial, y aplicaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius para categorizar el sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Comenzamos por realizar el determinante de la matriz principal, comprobando para que valores su determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a-6=0 \rightarrow \quad a=3$$

Para cualquier tal que $a \neq 3$ el determinante de la matriz principal es distinto de cero, lo que indica que su rango es máximo e igual al de la ampliada y al número de incógnitas → SCD : 1 solución. (R-F).

Para el caso $a=3$ la matriz principal tiene rango dos (se observa que hay muchos menores de orden dos distintos de cero), y debemos calcular el rango de la matriz ampliada. Normalmente deberíamos calcular todos los determinantes posibles de alternar la columna final con las anteriores, pero con algo de observación comprobamos que la matriz completa tiene rango dos, ya que la segunda fila se obtiene como suma de la primera y la tercera.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_1+F_3=F_2 \rightarrow \quad Rg(M)=2$$

Lo que nos indica que el rango de la ampliada es dos, igual que el de la principal para $a=3$ → SCI: ∞ soluciones (R-F).

a.2) Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado, como se ha indicado anteriormente, y podemos utilizar la Regla de Cramer para resolverlo.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$$

Por lo que la solución única sería $x = -1\,, y = 2\,, z = -1$.

Apartado b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

b.1) **[1,25 puntos]** Calcula los valores del parámetro a para que $A \cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula la inversa de $A \cdot B$ en función de a.

b.1) Para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea distinto de cero, por lo que comenzamos por realizar su producto y hallamos la condición pedida.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{vmatrix} = (1+2a) - (3+2a)(1-a) = 2a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$a_1 = -2 \quad , \quad a_2 = 1/2$$

Es decir, el producto es invertible si $a \neq -2 \ , \ 1/2$

b.2) Para calcular la inversa en función de a, utilizaremos la fórmula de la inversa de una matriz:

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{adj(A \cdot B)^T}{|A \cdot B|}$$

$$adj(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 1 & -(1-a) \\ -(3+2a) & 1+2a \end{pmatrix} \ , \ adj(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 1 & -(3+2a) \\ -(1-a) & 1+2a \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{2a^2 + 3a - 2} \begin{pmatrix} 1 & -(3+2a) \\ -(1-a) & 1+2a \end{pmatrix}$$

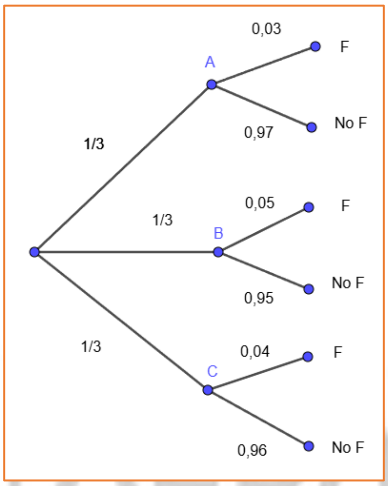
EJERCICIO 4. **(2,5 PUNTOS)** Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopiadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopiadoras están libres, elige una al azar.

a.1) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) **[1,5 puntos]** Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopiadora B?

a.1) Para analizar este ejercicio realizamos un diagrama de árbol, teniendo en cuenta que la primera elección se realice de forma aleatoria.



Para calcular la probabilidad de que la fotocopiadora no falle aplicamos el Teorema de la Probabilidad total:

$$P(No\ F) = P(A \cap No\ F) + P(B \cap No\ F) + P(C \cap No\ F)$$

$$P(No\ F) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}97 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}95 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}96$$

$$P(F) = 0{,}96 = 96\%$$

a.2) Para el siguiente apartado utilizamos el Teorema de la Probabilidad Condicionada (Teorema de Bayes).

$$P(B|F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{1/3 \cdot 0{,}05}{0{,}04} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417 = 41{,}7\%$$

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

b.1) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.

b.2) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.

b.3) **[1 punto]** Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

		p									
n	*k*	**0.05**	**0.1**	**0.15**	**0.2**	**0.25**	**0.3**	**0.35**	**0.4**	**0.45**	**0.5**
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

b.1) El número de restaurantes que no pasan una inspección vendrá descrito como una variable aleatoria en una distribución binomial $X \sim B(p = 0{,}05\,, n = 8)$.

Para el primer apartado, podemos definir la probabilidad pedida y buscarla en la tabla, teniendo en cuenta que estaremos buscando en la primera columna debido a que $p = 0{,}05$ y que el número de "éxitos" será $k = 3$.

$$P(X = 3) = 0{,}0054 \approx 0{,}54\%$$

b.2) Si todos los restaurantes pasan la inspección es equivalente que afirmemos que ninguno no la ha pasado, luego en este caso $k = 0$.

$$P(X = 0) = 0{,}6634 \approx 66{,}34\%$$

b.3) Si al menos dos restaurantes pasan la inspección es equivalente a afirmar que como máximo seis restaurantes no la pasan, lo que se puede escribir como:

$$P(X < 6) = 1 - \big(P(X = 7) + P(X = 8)\big) \approx 100\%$$

Esto es debido a que la probabilidad de que un restaurante no pase la inspección es tan pequeña, es prácticamente seguro que siempre al menos dos restaurantes la pasarán.