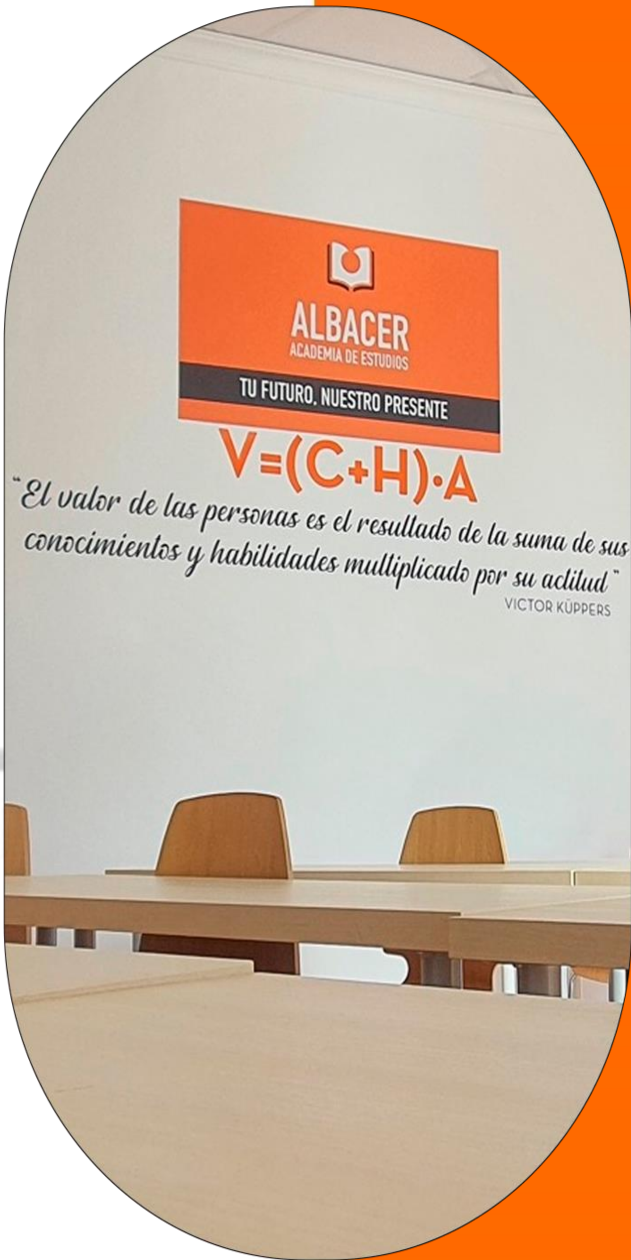
PAU 2025

Examen Matemáticas CCSS

Soluciones Julio

Matemáticas CCSS: Julio



Ejercicio 1.- Una empresa envasa zumos en botellas de 1 litro. La cantidad de zumo que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica $\sigma =$ 0.05 litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0.97 litros. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

c) Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar que el contenido medio poblacional es de 1 litro con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

a) La media poblacional sigue una distribución estadística tal que $X \sim N\left(\mu = 0{,}97\ ,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}05}{\sqrt{16}} = 0{,}0125\right)$ para un tamaño muestral de $n = 16$. El intervalo de confianza para un nivel del 0,97 viene dado por.

$$IC = (\bar{x} - E\ , \bar{x} + E)\ ;\ \ E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$ buscamos en la tabla de distribución el valor $(NC + 1)/2\ = 0{,}985\ \rightarrow\ z_{\alpha/2}\ = 2{,}17$. Por lo que se obtiene:

$$E\ = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx\ 0{,}027\ ;\ \ \ IC = (0{,}943\ , 0{,}997)$$

b) Sin modificar el nivel de confianza, reducir la amplitud del intervalo es equivalente a disminuir el error, que se puede conseguir, como se aprecia en la fórmula, aumentando el tamaño de la muestra.

c) En el caso de un 97% de NC no es admisible esta afirmación, ya que el contenido medio de 1 L se encuentra fuera de nuestro IC, por lo que no podemos afirmar este resultado. Por ello, para un nivel de confianza del 95% el IC es todavía mas pequeño (ya que el error disminuye con el nivel de confianza), por lo que tampoco quedaría dentro del nuevo IC y seguiría sin ser admisible.

Ejercicio 2.- En el Parador de Turismo de Almagro se alojaron ayer 25 huéspedes que hicieron las reservas con distintas compañías, procedentes de Italia, Portugal y Japón. El gasto total en el Parador fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada huésped portugués y 160 € a cada huésped japonés. El registro del Parador muestra que el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cuántos huéspedes hay de cada país. **(1.5 puntos)**

b) Calcula número de huéspedes de cada uno de los países. **(1 punto)**

a) Planteamos el sistema, teniendo en cuenta que "x, y, z" es la cantidad de huéspedes en el parador de procedencia Italia, Portugal y Japón respectivamente.

De la primera condición del total de huéspedes se obtiene:

$$x + y + z = 25 \qquad (I)$$

De la segunda condición, del gasto total:

$$140x + 130y + 160z = 3610 \to \; 14x + 13y + 16z = 361 \quad (II)$$

De la tercera relación entre huéspedes

$$y = \frac{1}{4}(x + z) \to x - 4y + z = 0 \quad (III)$$

b) Con el sistema de ecuaciones planteado, podemos hallar fácilmente el valor de y, restando la primera y tercera ecuación. Con este valor, posteriormente resolviendo la primera y segunda ecuación en función de x y z, habiendo sustituido y:

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ 14x + 13y + 16z = 361 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases} \to 5y = 25 \to \quad y = 5$$

$$\begin{cases} x + z = 20 \\ 14x + 16z = 296 \end{cases} \to \; 2x = 24 \to \; x = 12 \; ; \quad z = 8$$

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2+4 & si\ x \le k \\ -2x^2+8x & si\ x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valor de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es cóncava y en cuáles es convexa. **(0.75 puntos)**

a.1) Para que la función sea continua (teniendo en cuenta que son polinomios y que no posee puntos de discontinuidad propios) en $x = k$, se debe cumplir la condición de continuidad:

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^+} f(x)$$

Sustituyendo en los trozos de la función adecuado se obtiene la ecuación que nos permite obtener el valor de k

$$\lim_{x\to k^-} 2x^2+4 = \lim_{x\to k^+} -2x^2+8x$$

$$2k^2+4 = -2k^2+8x$$

$$4k^2-8k+4=0 \rightarrow \quad k=1$$

a.2) Si $k = 1$ la función es continua y podemos estudiar la función de forma global. Calculamos la derivada de la función, y obtenemos los extremos relativos, en los cuales esta derivada se anula

$$f'^{(x)} = \begin{cases} 4x & si\ x < 1 \\ -4x+8 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Cada uno de los trozos nos da un valor donde podría ubicarse un extremo relativo, que deberemos asegurar que se encuentra en el dominio adecuado.

$$4x = 0 \rightarrow \quad x_1 = 0 \ < \ 1$$

$$-4x+8=0 \rightarrow x_2 = 2 > 1$$

Como la segunda derivada es positiva para el primer trozo, para todo valor de x, nos encontramos ante un mínima en $x_1 = 0$, con valor $f(0) = \ 4$. Y con el segundo trozo ocurre, al contrario, es negativa para todo x, luego hay un máximo en $x_2 = 2$, con valor $f(2) = 8$

a.3) Con nuestro comentario anterior, teniendo en cuenta que la segunda derivada es positiva en el primer trozo y negativa en el segundo, y atendiendo a la definición de curvatura:

$$Convexa: (-\infty, 1)$$

$$Cóncava: (1, +\infty)$$

Teóricamente no podemos incluir el punto $x = 1$, ya que la segunda derivada no es continua en ese punto, dando un salto de curvatura.

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un punto de inflexión en $(1, -14)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a, b y c . **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $C \cdot X = A \cdot B + X$. **(1 punto)**

b.1) Comenzamos por realizar las derivadas de la función:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\,; \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

Para que se cumplan las condiciones del enunciado, debemos comprobar lo siguiente:

- mínimo relativo en (-1,2):

$$f(-1) = -a + b - c - 3 = 2 \quad (I)$$

$$f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \quad (II)$$

- punto de inflexión en (1,-14):

$$f(1) = a + b + c - 3 = -14 \quad (III)$$

$$f''(1) = 6a + 2b = 0 \quad (IV)$$

Esto nos da un sistema que podemos resolver de distintas formas, por ejemplo, sumando (I) y (III) y despejando b. Posteriormente sustituimos dicho valor en (II) y (IV) para obtener a y c.

$$2b - 6 = -12 \rightarrow \quad b = -3$$

$$6a = 2b \rightarrow \quad a = 1 \quad (IV)$$

$$c = 2b - 3a \rightarrow c = -9 \quad (II)$$

b.2) Para este apartado comenzamos por despejar la X

$$CX = AB + X \rightarrow \quad CX - X = AB$$

$$(C - I)X = AB \rightarrow \quad X = (C - I)^{-1}AB$$

Seguidamente realizamos los cálculos indicados:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad C - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C - I)^{-1} = \frac{adj(C - I)^T}{|C - I|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - I)^{-1}\, AB = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

"Indica el punto donde la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x + y \geq 6\,; 2x + 5y \leq 30\,; 2x - y \leq 6$"

Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$ y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto $(3, 0)$.

a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? **Razona tu respuesta. (1.25 puntos)**

a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto $(3, 0)$? **Razona tu respuesta. (0.75 puntos)**

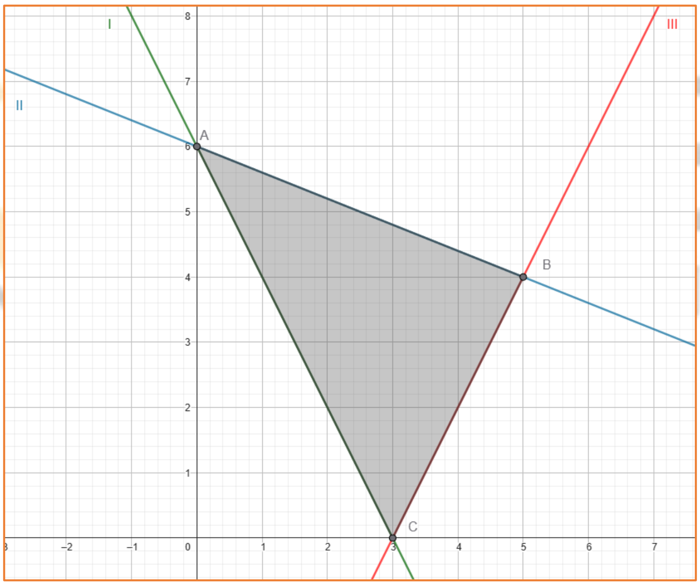
a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? **(0.5 puntos)**

a.1) Representemos el recinto definido por las restricciones

$$2x + y \geq 6 \quad (I)$$

$$2x + 5y \leq 30 \quad (II)$$

$$2x - y \leq 6 \quad (III)$$



Como se aprecia en la región hay tres puntos en los que la función puede alcanzar un punto mínimo: A (0,6) , B(5,4) y C(3,0). Recordad que estos puntos también se pueden encontrar analíticamente, sin necesidad de realizar la representación gráfica, resolviendo los sistemas formados por las restricciones (I), (II) y (III) tomando dos a dos.

Como el punto (1,2) no es uno de estos tres extremos la respuesta de Laura es incorrecta.

a.2) La respuesta de Jesús si pudiera ser acertada, ya que corresponde con el punto C(3,0). Sin embargo, para cerciorarnos de esta afirmación debemos comprobar el valor de la función objetivo en cada uno de estos puntos.

$$F(x, y) = 6x + 3y - 2$$

$$A(0,6) \rightarrow \ F_A(0,6) = 16$$

$$B(5,4) \rightarrow \ F_B(5,4) = 40$$

$$C(3,0) \rightarrow \ F_C(3,0) = 16$$

Si bien la respuesta de Jesús si es acertada, sería mas acertado decir que en el (3,0) se alcanza un mínimo, ya que no es único y tiene el mismo valor que en el punto A.

a.3) Como se observa en el apartado anterior, el valor de este mínimo es igual a 16, correspondiente al valor de F en dicho punto.

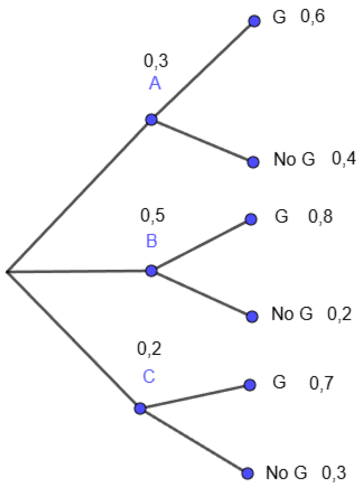
Apartado b) La compañía de seguros SEGURVIDA utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados. El bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados y el bufete C recibe el resto de los casos y gana el 70 % de los presentados. Se elige al azar uno de los casos que ha llegado a los tribunales y ya ha sido resuelto. Se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía haya ganado el caso? **(0.75 puntos)**

b.2) Si el caso elegido se ha perdido, calcula la probabilidad de que haya sido defendido por el bufete A. **(0.5 puntos)**

b.3) Si el precio por acción de la compañía de seguros sigue una función de la forma $A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$, donde $t =$ tiempo en horas transcurridas desde el inicio, alcanza un máximo en la tercera hora $t = 3$, alcanzando un valor de 54 € la acción en ese instante, encuentra el valor de los parámetros a y b. **(1.25 puntos)**

b.1) Para comenzar realizamos un diagrama de árbol para identificar los datos del problema



La probabilidad de ganar el caso se puede hallar utilizando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G)$$

$$P(G) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7$$

$$P(F) = 0{,}72 = 72\%$$

b.2) Para el siguiente apartado utilizamos el Teorema de la Probabilidad Condicionada (Teorema de Bayes).

$$P(A|No\ G) = \frac{P(A \cap No\ G)}{P(No\ G)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}72} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429 = 42{,}9\%$$

b.4) Comenzamos por hallar la derivada de la función A(t)

$$A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$$

$$A'(t) = 3at^2 - 24t + b$$

Si sabemos que en $t = 3$ hay una máximo de la función, con valor $A(3) = 54$, podemos expresar estas condiciones como:

$$A(3) = 27a - 108 + 3b = 54$$

$$A'(3) = 27a - 72 + b = 0$$

Que podemos resolver de forma sencilla, por reducción, si restamos ambas ecuaciones.

$$-36 + 2b = 54 \rightarrow b = 45$$

$$27a - 72 + 45 = 0 \rightarrow a = 1$$