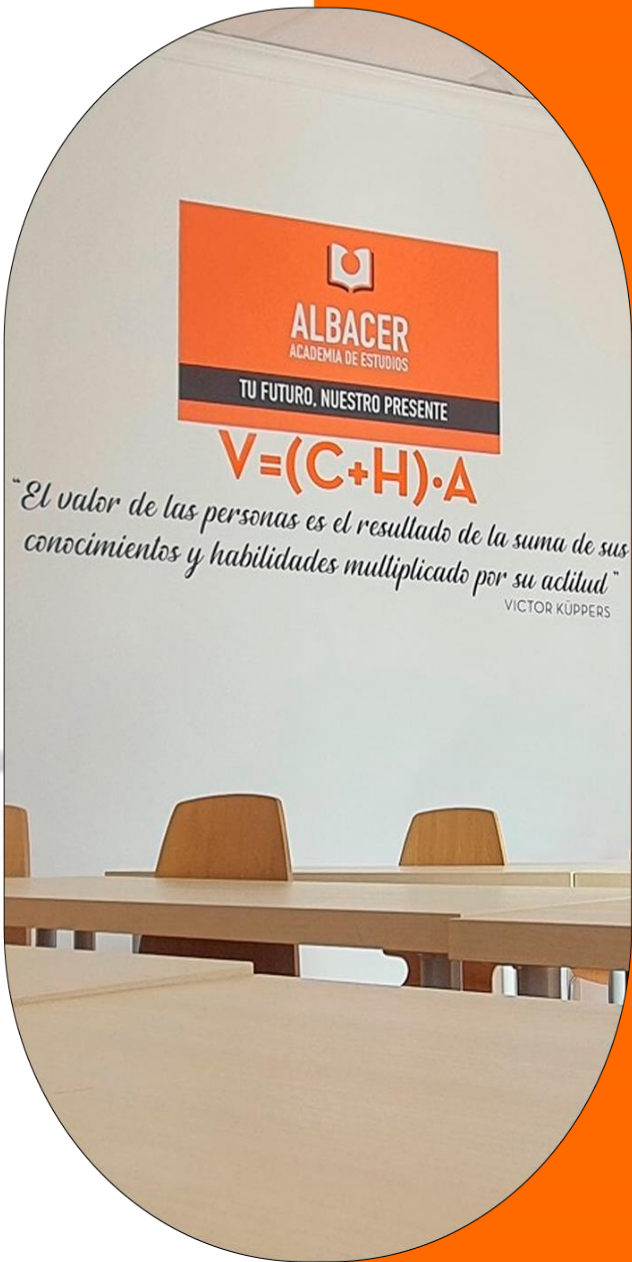
ALBACER
ACADEMIA DE ESTUDIOS

PAU 2026

Examen Matemáticas CCSS

Soluciones Junio

Matemáticas CCSS: Junio 2026



Ejercicio 1.- En una Comunidad Autónoma, el 40% de los clubes deportivos son de fútbol, el 15% de baloncesto y el 45% restante de otros deportes. En estos grupos, los clubes femeninos suponen el 20% en el caso del fútbol, el 45% en el de baloncesto y el 50% en el de otros deportes.

a) Si se elige un club deportivo al azar, calcula la probabilidad de que sea femenino. **(1 punto)**

b) Si el club elegido es femenino, calcula la probabilidad de que sea de baloncesto. **(1 punto)**

c) Si se seleccionan al azar dos clubes deportivos, calcule la probabilidad de que uno sea de fútbol y uno de otros deportes. **(0.5 puntos)**

1.a) El apartado se calcula haciendo uso del teorema de la probabilidad total, que viene dado por:

$$P(F) = P(Fut \cap F) + P(Bal \cap F) + P(Ot \cap F)$$

$$P(F) = P(F|Fut)P(Fut) + P(F|Bal)P(Bal) + P(F|Ot)P(Ot)$$

$$P(C) = 0.2 \cdot 0.4 + 0.45 \cdot 0.15 + 0.5 \cdot 0.45 = 0.3725$$

1.b) Para esta pregunta, hacemos uso del teorema de Bayes de la probabilidad condicionada, utilizando $P(F)$ del apartado anterior:

$$P(Bal|F) = \frac{P(Bal \cap F)}{P(F)} = \frac{0.45 \cdot 0.15}{0.3725} = 0.1812$$

1.c) Si etiquetamos los dos sucesos, como escoger un club u otro, podemos calcularlo si tenemos en cuenta que el orden en el que se escogen no es relevante y que las probabilidades de escoger uno u otro son independientes

$$P(Fut\ y\ Ot) = P(Fut \cap Ot) + P(Ot \cap Fut) = 2P(Fut \cap Ot) = 2 \cdot 0.4 \cdot 0.45 = 0.36$$

Ejercicio 2.- Una empresa invirtió un total de 20000 euros entre tres fondos de inversión: A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 994 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió la empresa en cada fondo. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra cuánto dinero se ha invertido en cada uno de los fondos de inversión. **(1 punto)**

2.a) Podemos escribir tres ecuaciones a partir de los datos del problema, si llamamos x, y, z a las cantidades invertidas en los fondos de inversión A, B y C.

1. Inversión total: $x + y + z = 20000$

2. Beneficio total: $0.05x + 0.1y + 0.02z = 994$

3. Relación entre inversiones: $x = 3(y + z)$

2.b) Para resolver el sistema podemos utilizar cualquier método de resolución como Cramer, el método de la inversa, etc. En este caso podemos sustituir la ecuación 3. en 1 y 2 y resolver por reducción:

$$3(y+z) + y + z = 20000 \rightarrow \ 4y + 4z = 20000$$

$$0.05 \cdot 3(y+z) + 0.1y + 0.02z = 994 \rightarrow 0.25y + 0.17z = 994$$

Multiplicando la ecuación 2. por 16 y restándolas:

$$\begin{array}{c} 4y + 4z = 20000 \\ 4y + 2.72z = 15904 \end{array} \rightarrow \ 1.28z = 4096 \rightarrow \ z = 3200€$$

A partir de sustituciones en las ecuaciones 1. y 3. Obtenemos el valor de x e y:

$$4y + 4z = 20000 \ \rightarrow y = 1800€$$

$$x = 3(y+z) \rightarrow \ x = 15000€$$

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) La profundidad de la capa de arena en una playa se verá afectada por la construcción de un dique. La profundidad (*P*) en función del tiempo, en años desde el inicio de la construcción (*t*) vendrá dada por la función $P(t) = \begin{cases} 2+t^2 & si\ 0 \le t \le 1 \\ \frac{8t^2-t-1}{2t^2} & si\ t > 1 \end{cases}$. Si la profundidad llegara a superar los 4 metros, se debería elevar la altura del paseo marítimo.

a.1) ¿Es la profundidad una función continua del tiempo? **(1 punto)**

a.2) ¿Disminuirá alguna vez la profundidad? **(1 punto)**

a.3) Por mucho tiempo que pase ¿será necesario elevar la altura del paseo por causa de la profundidad de la capa de arena? **(0.5 puntos)**

3.a.1) Para comprobar la continuidad comenzamos por comentar cada una de las partes que conforma la función a trozos. La primera es continua al ser un polinomio de segundo grado. La segunda es continua excepto en el 0, ya que el denominador se anula para $2t^2 = 0 \rightarrow \ t = 0$. Sin embargo, este valor se encuentra fuera del dominio de la segunda parte $t > 1$, por lo que el único punto que queda por comprobar es dicho valor $t = 1$. Para ello estudiamos si los límites laterales son iguales, comprobando que la función si es continua:

$$\lim_{t\to 1^-} 2+t^2 = \lim_{t\to 1^+} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = 3$$

3.a.2) Para comprobar este apartado tenemos en cuenta que la derivada permite calcular el crecimiento o decrecimiento de la función, por lo que:

$$P'(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t < 1 \\ \dfrac{(16t-1)2t^2 - (8t^2-t-1)4t}{4t^4} & t > 1 \end{cases}$$

Es evidente que el primer tramo es creciente para valores mayores que 0 de t, en cuanto al segundo tramo debemos calcular los extremos relativos como:

$$(16t-1)2t^2 - (8t^2-t-1)4t = 0$$

$$2t^2 + 4t = 2t(t+2) = 0 \rightarrow \ t = 0 \ \ y \ t = -2$$

Ninguno de estos tramos está dentro del dominio del segundo tramo, por lo que la función no tiene extremos relativos para $t > 1$, ahora basta con calcular su monotonía en cualquier punto:

$$P'(2) = \frac{1}{4} > 0$$

Por lo que la función siempre es creciente y no disminuye nunca.

3.2.c) Nunca será necesario elevar la altura del paseo marítimo, ya que el límite cuando la función tiende a infinito:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = 4$$

Lo que quiere decir que nunca se alcanzará dicho valor, ya que es un límite asintótico a lo que tiende la función.

Apartado b) Un profesor ha comprobado que el grado de atención, puntuado de 0 a 100, que le prestan sus alumnos durante los 40 minutos de duración de su clase sigue la siguiente función: $F(t) = at(b - t)$ con $0 \leq t \leq 40$. Sabiendo que a los 20 minutos de comenzar la clase le prestan la máxima atención, es decir, el grado de atención es 100, se pide:

b.1) Determina, justificando la respuesta, a y b. **(1 punto)**

b.2) Halla la atención a los cinco minutos. **(0.5 puntos)**

b.3) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $AXA^{-1} = B$. **(1 punto)**

3.b.1) Las condiciones de los parámetros se hallan imponiendo las condiciones del profesor, esto es, que la función tenga un máximo de valor 100 en t = 20.

$$F(20) = 20a(b - 20) = 100$$

$$F'(t) = a(b - t) - at = ab - 2at$$

$$F'(20) = ab - 40a = 0$$

De la segunda condición, ya que a no puede valer 0, porque la función se haría nula, solo es posible que:

$$ab - 40a = 0 \rightarrow \quad b = 40$$

Y sustituyendo en la primera condición

$$20a(40 - 20) = 400a = 100 \rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

3.b.2) La atención a los 5 minutos se halla sustituyendo en la función original con los valores de los parámetros anteriores:

$$F(5) = 5 \cdot \frac{1}{4}(40 - 5) = 43.75$$

3.b.3) Primero comenzamos por despejar la X, recordando que la inversa de A es A^{-1} (y viceversa), por lo que:

$$AXA^{-1} = B \rightarrow \quad X = A^{-1}BA$$

Calculamos la inversa de A y multiplicamos siguiendo el orden mostrado:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad X = A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En un coto de caza de Ciudad Real hay conejos y perdices. Por indicación de la Consejería de Agricultura de la JCCM, se han determinado las siguientes restricciones: el número máximo de piezas cazadas es de 400, se permite la captura de un número de conejos superior o igual al de perdices y el número máximo de conejos que se pueden cazar es de 240. Si al dueño del coto le proporciona un beneficio de 35 € por conejo y 43 € por perdiz,

a.1) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(1.5 puntos)**

a.2) Determina cuántos conejos y perdices se deben cazar para que el beneficio sea máximo y encuentra dicho beneficio máximo. **(1 punto)**

4.a.1) La función objetivo es aquella que quiere maximizarse o minimizarse en función de las variables, que serían el número de conejos y perdices cazados (x e y)

$$B(x, y) = 35x + 43y$$

En cuanto a las restricciones, además de las inmediatas del primer cuadrante, tenemos las siguientes:

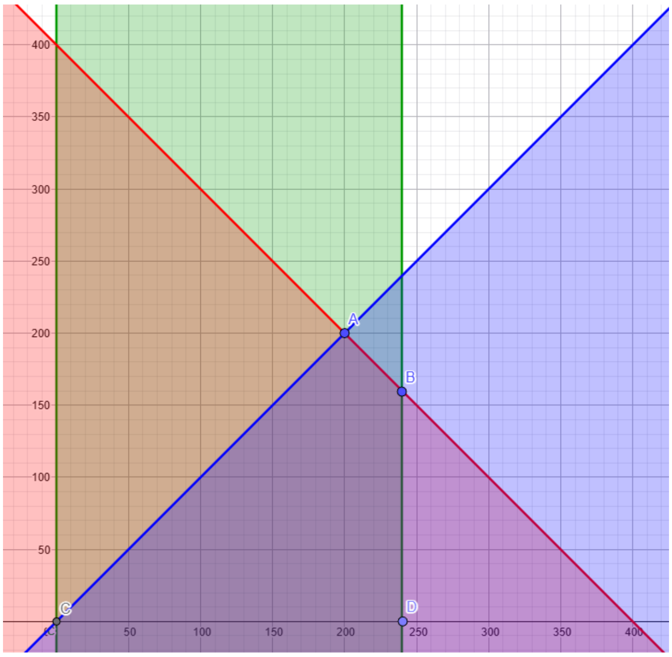
1. Número máximo de piezas: $x + y \leq 400$

2. Número de conejos superior al de perdices: $x \geq y$

3. Restricciones de conejos: $0 \leq x \leq 240$

4. Restricciones de perdices: $0 \leq y$

Esta región se puede representar gráficamente como la región factible del problema entre los vértices A,B,C y D.



4.a.2) En los vértices de la región anterior, todas las funciones lineales de las variables x e y deben alcanzar sus extremos en los vértices. Las coordenadas de dichos vértices se pueden hallar analíticamente (resolviendo las ecuaciones de cada par de restricciones) o gráficamente, donde ya se observa que:

A(200,200) , B(240,160) , C(0,0) y D (240,0)

Para compararlos los aplicamos a la función objetivo hasta encontrar el máximo.

$$B(200,200) = 35 \cdot 200 + 43 \cdot 200 = 15600€$$

$$B(240,160) = 35 \cdot 240 + 43 \cdot 160 = 15280€$$

$$B(0,0) = 35 \cdot 0 + 43 \cdot 0 = 0€$$

$$B(240,0) = 35 \cdot 240 + 43 \cdot 0 = 8400€$$

Donde se puede afirmar que el beneficio máximo se obtiene en el punto B, al cazar 200 conejos y 200 perdices. Dicho beneficio máximo es de 15600€

Apartado b) Una operadora de telefonía móvil estima que la duración, en segundos, de las llamadas sigue una distribución normal con una desviación típica de $\sigma = 60$ segundos. Se seleccionan al azar 36 llamadas telefónicas y se observa que su duración media es de 240 segundos. Con un nivel de confianza del 95%,

b.1) Obtén un intervalo de confianza para la duración media poblacional de todas las llamadas de esa operadora. **(1 punto)**

b.2) Explica, justificando la respuesta, cuál sería la amplitud del intervalo de confianza anterior si se aumenta la muestra a 100 llamadas. **(0.75 puntos)**

b.3) Si se desea que una duración media de 230 segundos no esté contenida en el intervalo del apartado b.1), justifique si se debe aumentar o disminuir el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

4.b.1) Para calcular el intervalo de confianza de la media poblacional tenemos en cuenta los datos del enunciado:

$$\sigma = 60s \ ; \quad n = 36 \ ; \ \ \bar{x} = 240 \ ; \quad NC = 95\%$$

Para buscar el $z_{\alpha/2}$ utilizamos el valor 97.5% = 0.975, para buscar en la tabla, por lo que $z_{\alpha/2} = 1.96$. A partir de aquí sustituimos en la fórmula del intervalo de confianza.

$$IC = (\bar{x} \pm E) = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (240 \pm 19.6) = (220.4, 259.6)\ s$$

4.b.2) Al aumentar el tamaño de la muestra a 100, la amplitud del intervalo, que se corresponde con el doble del error, disminuye:

$$A = 2E = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 23.52\ s$$

4.b.3) Para que la duración media de 230 no este contenida en el intervalo de confianza se deberá disminuir la amplitud de este. Para ello, sin modificar el tamaño de la muestra, el nivel de confianza debe disminuir, para que el valor $z_{\alpha/2}$ sea menos que en el apartado b.1.