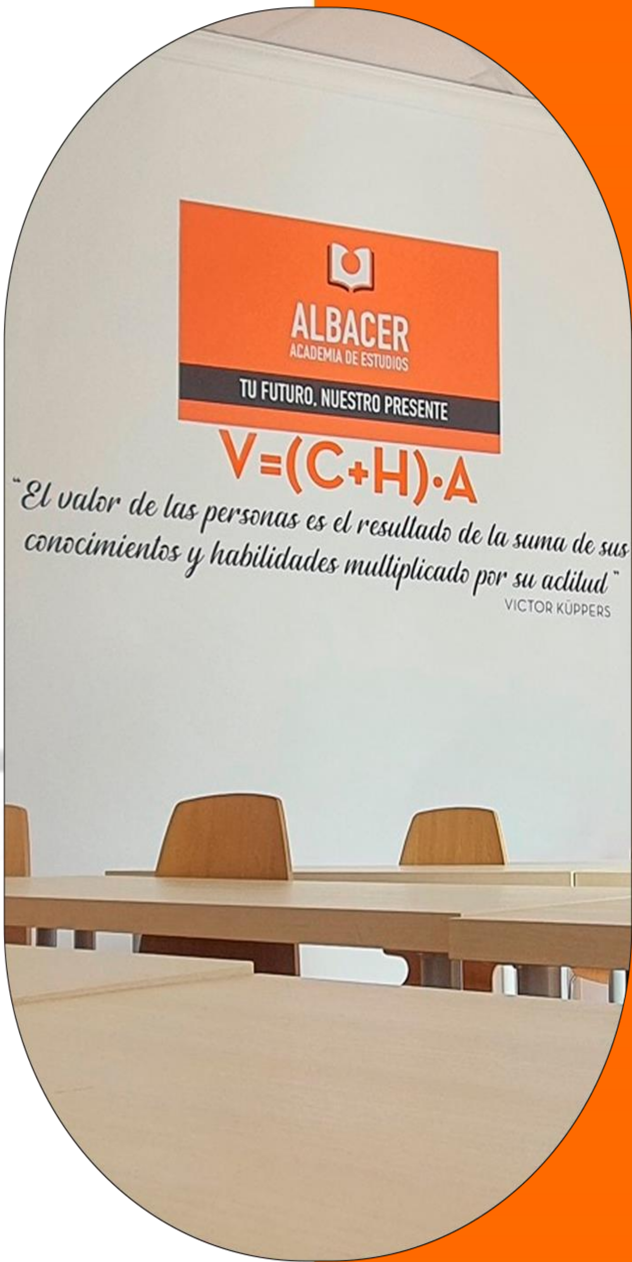
ALBACER
ACADEMIA DE ESTUDIOS

PAU 2026

Examen Matemáticas II

Soluciones Junio

Matemáticas II: Junio 2026



Pregunta 1.

Durante la misión Dulcinea, el equipo de control clasifica las alertas técnicas detectadas a bordo en tres sistemas: sistema de navegación, que genera el 50% de las alertas, el sistema de comunicaciones, que genera el 30% de las alertas y el sistema de soporte vital, que genera el 20% de las alertas.
Además, se sabe que el 4% de las alertas de navegación, el 6% de las de comunicaciones y el 10% de las alertas de soporte vital, son críticas. Si se elige una alerta al azar.

a) **[1 punto]** Calcula la probabilidad de que la alerta sea crítica.
b) **[1 punto]** Sabiendo que la alerta no es crítica, calcula la probabilidad de que proceda del soporte vital.

1. a) La probabilidad de que la alerta sea critica se puede calcular con el Teorema de la Probabilidad total, como:

$$P(C) = P(Nav \cap C) + P(Com \cap C) + P(Vit \cap C)$$

$$P(C) = P(C|Nav)P(Nav) + P(C|Com)P(Com) + P(C|Vit)P(Vit)$$

$$P(C) = 0.04 \cdot 0.5 + 0.06 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.058$$

1.b) El segundo apartado se calcula utilizando la relación de Bayes de probabilidad condicionada:

$$P(Vit|\bar{C}) = \frac{P(Vit \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(\bar{C}|Vit)P(Vit)}{1 - P(C)} = \frac{0.9 \cdot 0.2}{1 - 0.058} = 0.191$$

Pregunta 2.

Durante una campaña de promoción de productos de Castilla-La Mancha, una empresa dedicada a la venta de azafrán estima que el beneficio diario obtenido, expresado en cientos de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = 80x \cdot e^{-0,5x}$$

Donde x representa el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña

a) **[1,25 puntos]** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $B(x)$ y determina el día en que el beneficio diario es máximo
b) **[0,75 puntos]** A largo plazo, ¿tiende el beneficio diario a estabilizarse en algún valor? En caso afirmativo determina dicho valor e interprételo en el contexto del problema.

2.a) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, estudiamos el signo de la derivada $B'(x)$:

$$B'(x) = 80e^{-0.5x} - 40xe^{-0.5x} = (80 - 40x)e^{-0.5x}$$

$$B'(x) = 0 \rightarrow \ 80 - 40x = 0 \rightarrow \ x = 2 \ días$$

Ya que la parte exponencial no puede anularse para ningún valor. Comprobamos el signo de la derivada a ambos lados de $x = 2 \ días$

$$B'(1) = e^{-0.5} > 0 \rightarrow Creciente$$

$$B'(3) = -e^{-0.5} < 0 \rightarrow Decreciente$$

La función es creciente en $x \in (0,2)$ y decreciente en $x \in (2, \infty)$, poseyendo un máximo en $x = 2 \ días$.

2.b.) El valor del beneficio se estabilizará en algún valor si el límite en el infinito tiende a un valor finito, donde se utilizará la regla de L'Hôpital para resolver las indeterminaciones ∞/∞:

$$\lim_{n\to\infty} B(x) = \lim_{n\to\infty} 80xe^{-0.5x} = [\infty \cdot 0]^{IND}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{80x}{e^{0.5x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{IND} = \lim_{n\to\infty} \frac{80}{0.5e^{0.5x}} = 0$$

El valor al que se estabilizará será 0, lo que quiere decir que el beneficio será nulo cuando pase mucho tiempo desde el comienzo de la campaña.

Pregunta 3.

a) **[1 punto]** Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que A·B=I, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$

3.a) Para que cumpla la condición debe cumplirse, al multiplicar las dos matrices, que sea igual a la identidad, de lo que se pueden extraer dos condiciones para obtener a y b:

$$AB = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-b & 0 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 - a = 1 \to a = 1$$

$$b - 1 = 1 \to \ b = 2$$

3.b) Llamemos a las dos matrices numéricas C y D para resolver el sistema por reducción, de la forma:

$$\begin{cases} X + Y = C \\ 2X + 3Y = D \end{cases} \to \begin{matrix} 3X + 3Y = 3C \\ 2X + 3Y = D \end{matrix} \to X = 3C - D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X + Y = C \\ 2X + 3Y = D \end{cases} \to \begin{matrix} 2X + 2Y = 2C \\ 2X + 3Y = D \end{matrix} \to Y = -(2C - D) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, a), \vec{v} = (2, a, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 1, -1)$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea 10 u^3.

4.1a) Para que los vectores sean coplanarios, su producto mixto debe ser igual a 0, o lo que es lo mismo, los vectores deben ser linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow \ a = 1\,, a = -2$$

Para los valores anteriores los tres vectores son coplanarios, ya que los tres son combinaciones lineales entre ellos pertenecientes al mismo plano.

4.1b) El valor absoluto del producto mixto también se corresponde con el volumen del paralelepípedo formado por los vectores como aristas de éste. Por ello igualando el determinante anterior al volumen requerido podemos obtener los valores del parámetro que se nos pide:

$$a^2 + a - 2 = |10|$$

$$a^2 + a - 2 = 10 \rightarrow \ a = 3, -4$$

$$a^2 + a - 2 = -10 \rightarrow \ No\ posee\ soluciones\ reales$$

4.2. [2 puntos] En un parque público, se está instalando un sistema de vigilancia mediante sensores de movimiento a ambos lados de un muro recto. Dicho muro está representado por el plano de ecuación:

$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0.$$

Uno de los sensores está situado en el punto de coordenadas P(1,2,6) y se desea instalar un segundo sensor en el punto P', simétrico del anterior respecto del plano π.

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente las coordenadas del punto de instalación del segundo sensor, P'.

b) **[0,75 puntos]** Calcula la distancia entre los dos sensores.

4.2.a) Para calcular el punto simétrico a P respecto a π comenzamos realizando una recta perpendicular al plano y que pase por P, que tiene el mismo vector director que el vector normal del plano:

$$r \equiv \begin{cases} P(1,2,6) \\ v_r = n = (1,1,1) \end{cases} \rightarrow \ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

Continuamos encontrando el valor del punto de intersección, sustituyendo las ecuaciones de la recta en las del plano, obteniendo el valor de λ:

$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0 \rightarrow (1+\lambda) + (2+\lambda) + (6+\lambda) - 6 = 0$$

$$3\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Encontramos el punto sustituyendo en la ecuación de la recta, que será el punto medio entre P y P', por lo que podemos obtener P' con la relación del punto medio:

$$M(0,1,5) \rightarrow \ P' = 2M - P = (-1,0,4)$$

4.2.b) Para calcular la distancia entre los sensores basta con hallar el módulo del vector que los une PP':

$$P'P = P - P' = (2,2,2) \rightarrow \ |PP'| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}\,u$$

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1.

a) **[1 punto]** Calcula justificadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x$

b) **[1 punto]** Calcula justificadamente la siguiente integral: $\int e^x \cdot senx\, dx$

5.1a) El primer límite se corresponderá con una indeterminación 1^∞, que se puede resolver utilizando la relación siguiente y la regla de L´Hôpital cuando sea necesaria:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x = [1^\infty]^{IND} = e^L$$

$$L = \lim_{n\to\infty} x\left(\frac{2x+1}{2x-3} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4x}{2x-3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2} = 2$$

Por lo tanto, el valor del límite se corresponde con e^2.

5.1b) La integral se puede calcular por partes, sucesivamente:

$$\mathrm{u} = \sin x \rightarrow \quad du = \cos x \, dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow \quad v = e^x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Es necesario volver a hacer el segundo término por partes y sustituirlo en la relación anterior

$$\mathrm{u} = \cos x \rightarrow \quad du = -\sin x \, dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow \quad v = e^x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int -e^x \sin x \, dx$$

Continuando, y llamando a $\int e^x \sin x \, dx = I$ tenemos:

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$I = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$$

5.2. [2 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & si \;\; x < 1 \\ ax + b & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$, donde a y b son números reales. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en x=1

5.2 Para que la función sea continua debe cumplirse que los límites laterales en $x = 1$ sean iguales, es decir:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} ax + b$$

Resolviendo la indeterminación de la izquierda 0/0 por la regla de L´Hôpital tenemos

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 = \lim_{x \to 1^+} ax + b = a + b$$

$$2 = a + b$$

Para obtener la segunda relación debemos tener en cuenta la derivabilidad de la función, que es equivalente a comprobar la continuidad de su derivada, es decir, de:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(x-1)-(x^2-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1} = 1 & si\ x < 1 \\ a & si\ x > 1 \end{cases}$$

Repitiendo la condición de igualdad de límites laterales tenemos

$$\lim_{x\to 1^-} 1 = \lim_{x\to 1^+} a \to \quad a = 1$$

A partir del valor anterior obtenemos finalmente que $b = 1$.