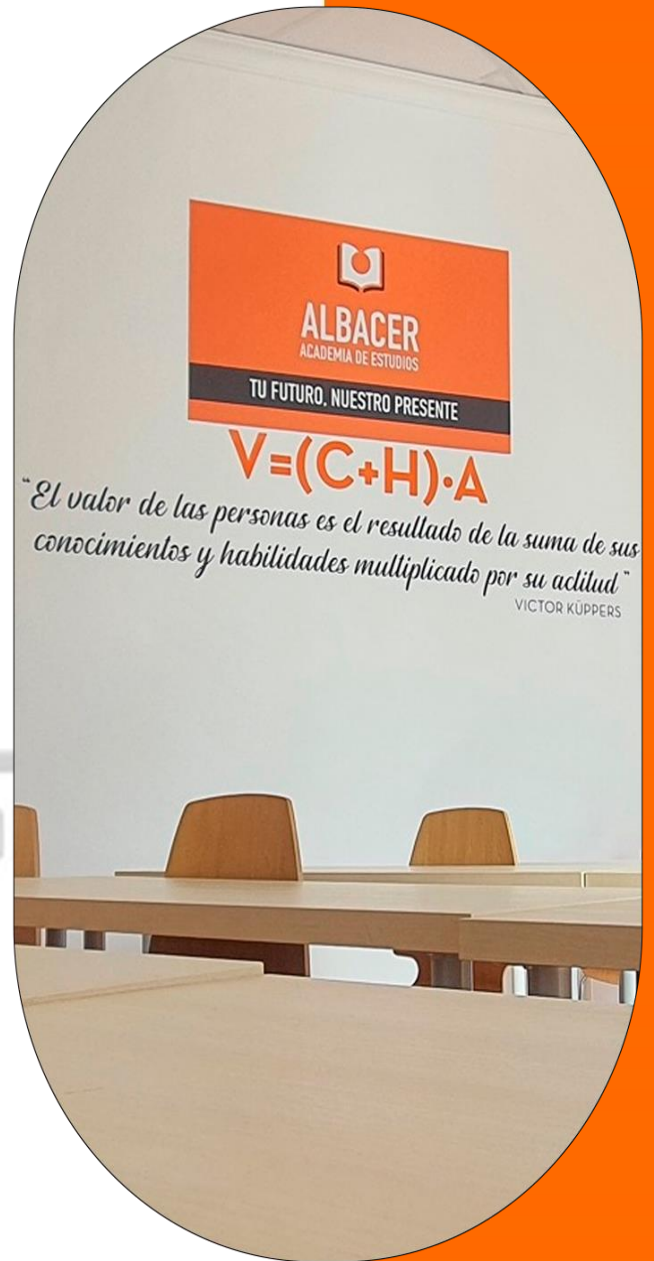


PAU 2026

Examen Matemáticas CCSS

Soluciones Julio

Matemáticas CCSS: Julio 2026



Ejercicio 1.- En una Comunidad Autónoma, el 75% de las personas reside en núcleos urbanos, el 10% en núcleos rurales, y, el 15% restante, en núcleos periurbanos. En estos núcleos, las personas que viven de alquiler suponen el 40% en los urbanos, el 10% en los rurales y el 30% en los periurbanos.

- a) Calcula la probabilidad de que una persona, elegida al azar, viva de alquiler. **(1 punto)**
- b) Si una persona, elegida al azar, vive de alquiler, calcula la probabilidad de que lo haga en un núcleo urbano. **(1 punto)**
- c) Si se seleccionan al azar dos personas, calcula la probabilidad de que una de ellas resida en un núcleo rural y la otra en uno periurbano. **(0.5 puntos)**

1.a) El apartado se calcula haciendo uso del teorema de la probabilidad total, que viene dado por:

$$P(A) = P(Urb \cap A) + P(Rur \cap A) + P(Per \cap A)$$

$$P(A) = P(A|Urb)P(Urb) + P(A|Rur)P(Rur) + P(A|Per)P(Per)$$

$$P(A) = 0.4 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.15 = 0.355$$

1.b) Para esta pregunta, hacemos uso del teorema de Bayes de la probabilidad condicionada, utilizando $P(F)$ del apartado anterior:

$$P(Urb|A) = \frac{P(Urb \cap A)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{0.355} = 0.845$$

1.c) Si etiquetamos los dos sucesos, como residir en una zona u otra, podemos calcularlo si tenemos en cuenta que el orden en el que se escogen no es relevante y que las probabilidades de escoger uno u otro son independientes

$$P(Rur \text{ y } Per) = P(Per \cap Rur) + P(Rur \cap Per) = 2P(Per \cap Rur) = 2 \cdot 0.1 \cdot 0.15 = 0.03$$

Ejercicio 2.- Un grupo de 30 alumnos de 2º de bachillerato realiza una votación a fin de determinar el campus universitario que prefieren visitar: Ciudad Real, Cuenca y Toledo. El número de los que prefieren Ciudad Real triplica al número de los que prefieren Toledo. El 40 % de los que prefieren Cuenca coincide con la quinta parte de la suma de los que prefieren los otros dos lugares. Halla el número de votos que obtuvo cada campus. **(Planteamiento: 1,5 puntos. Resolución: 1 punto)**

2. Podemos escribir tres ecuaciones a partir de los datos del problema, si llamamos x , y , z a los números de votos de Ciudad Real, Cuenca y Toledo:

1. Votos totales: $x + y + z = 30$

2. Relación entre votos: $x = 3z \rightarrow x - 3z = 0$

3. Relación entre votos: $0.4y = \frac{1}{5}(x + z) \rightarrow x - 2y + z = 0$

Para resolver el sistema podemos utilizar cualquier método de resolución como Cramer, el método de la inversa, etc. En este caso podemos despejar en la ecuación 2 y sustituir en 1 y 3 para resolver:

2. $x = 3z$

1. $y + 4z = 30$

2. $-2y + 4z = 0$

Restándolas podemos encontrar y , resolviendo por sustitución el resto:

$3y = 30 \rightarrow y = 10$

$4z = 20 \rightarrow z = 5$

$x = 3z \rightarrow x = 15$

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq k \\ -3x^2 + 3 & \text{si } x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = -1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

3.a.1) Para ello estudiamos si los límites laterales son iguales en el punto de interés, comprobando que la función es continua:

$$\lim_{x \rightarrow k^-} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow k^+} -3x^2 + 3$$

$$k^2 + 4k + 3 = -3k^2 + 3 \rightarrow 4k^2 + 4k = 0 \rightarrow k = 0, k = -1$$

Para los valores anteriores la función es continua en $x = k$

3.a.2) 3.a.3) Para comprobar este apartado tenemos en cuenta que la derivada permite calcular el crecimiento o decrecimiento de la función, por lo que:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ -6x & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Para calcular los extremos relativos comprobamos que la derivada se anule y que el punto se corresponda con el dominio de cada tramo:

$$2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2 \text{ si pertenece a } x \leq -1$$

$$-6x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ si pertenece a } x > -1$$

La función es decreciente para $x \leq -2$ ya que $f'(-3) < 0$ y creciente $-2 < x \leq -1$, por lo que en $x = -2$ hay un mínimo relativo.

La función es creciente para $-1 < x \leq 0$ ya que $f'(-0.5) > 0$ y decreciente $x > 0$, por lo que en $x = 0$ hay un máximo relativo

Apartado b) El volumen de agua, en millones de litros, almacenado por el embalse de Alarcón a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t en años viene dado por la función: $V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$ con $0 \leq t \leq 11$.

b.1) La cantidad de agua almacenada en el último año. **(0.25 puntos)**

b.2) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo. **(1 punto)**

b.3) El volumen máximo que se alcanzó en ese periodo. **(0.25 puntos)**

b.4) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $AXA^{-1} = B$. **(1 punto)**

3.b.1) La función representa el volumen en litros, por lo que basta con sustituir el último año, en 11.

$$V(11) = 8407 \text{ Millones de L.}$$

3.b.2) 3.b.3) Para calcular el año del máximo derivamos la función e igualamos a cero, considerando solo los valores en el intervalo $0 \leq t \leq 11$

$$V'(t) = 3t^2 - 48t + 180 = 0 \rightarrow t = 6, t = 10$$

Realizamos la segunda derivada para comprobar si son máximos o mínimos:

$$V''(t) = 6t - 48$$

$$V''(6) < 0 \rightarrow \text{máximo} \quad V''(10) > 0 \rightarrow \text{mínimo}$$

Además, hay que comparar el valor de la función en $t = 6$ con los extremos del dominio:

$$V(0) = 8000, \quad V(6) = 8432, \quad V(11) = 8407$$

Por lo tanto, el valor máximo se da en $t = 6$ con valor 8432 mill. litros.

3.b.4) Primero comenzamos por despejar la X , recordando que la inversa de A es A^{-1} (y viceversa), por lo que:

$$AXA^{-1} = B \rightarrow X = A^{-1}BA$$

Calculamos la inversa de A y multiplicamos siguiendo el orden mostrado:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow X = A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 12 & -13 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Un fabricante de abanicos dispone de dos modelos, A y B. El modelo A requiere, para su fabricación, 40 cm² de papel, 80 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El modelo B requiere: 60 cm² de papel, 160 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El coste de producción de cada modelo es de 1,20 € el de A y 1,30 € el de B. El precio de venta es de 3 € cada uno, independientemente del modelo. Teniendo en cuenta que las existencias son de 3000 cm² de papel, 7200 cm² de lámina de madera y 70 enganches.

- a.1) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(1.5 puntos)**
- a.2) Determina el número de abanicos que deben fabricarse y venderse para que el beneficio sea máximo y encuentra dicho beneficio máximo. **(1 punto)**

4.a.1) La función objetivo es aquella que quiere maximizarse o minimizarse en función de las variables, que serían el número de abanicos A y B (x e y), teniendo en cuenta que beneficio es igual a venta menos costes:

$$B(x,y) = 3(x + y) - 1.2x - 1.3y = 1.8x + 1.7y$$

En cuanto a las restricciones, además de las inmediatas del primer cuadrante, tenemos las siguientes:

1. Cantidad máxima de papel: $40x + 60y \leq 3000$
2. Cantidad máxima de madera: $80x + 160y \leq 7200$
3. Cantidad máxima de enganches: $x + y \leq 70$

Esta región se puede representar gráficamente como la región factible del problema entre los vértices A, B, C, D y E



4.a.2) En los vértices de la región anterior, todas las funciones lineales de las variables x e y deben alcanzar sus extremos en los vértices. Las coordenadas de dichos vértices se pueden hallar analíticamente (resolviendo las ecuaciones de cada par de restricciones) o gráficamente, donde ya se observa que:

$$A(30,30), B(60,10), C(70,0), D(0,0) \text{ y } E(0,45)$$

Para compararlos los aplicamos a la función objetivo hasta encontrar el máximo.

$$B(30,30) = 105\text{€}$$

$$B(60,10) = 125\text{€}$$

$$B(70,0) = 126\text{€}$$

$$B(0,0) = 0\text{€}$$

$$B(0,45) = 76.5\text{€}$$

Donde se puede afirmar que el beneficio máximo se obtiene en el punto C, al fabricar 70 abanicos del tipo A y ninguno del B, con un beneficio de 126€.

Apartado b) Una empresa fitosanitaria afirma que la duración, en días, del efecto de su fungicida sigue una distribución normal con una desviación típica de $\sigma = 6$ días. Se suministra el fungicida a una muestra aleatoria de 16 plantas y se observa que la duración media del efecto es de 16 días. Con un nivel de confianza del 95%,

- b.1) Obtén un intervalo de confianza para la duración media poblacional del efecto. **(1 punto)**
- b.2) Explica, justificando la respuesta, cuál sería la amplitud del intervalo de confianza anterior si se aumenta la muestra a 64 plantas. **(0.75 puntos)**
- b.3) Si se desea que una duración media de 14 días del efecto no esté contenida en el intervalo del apartado b.1), justifique si se debe aumentar o disminuir el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

4.b.1) Para calcular el intervalo de confianza de la media poblacional tenemos en cuenta los datos del enunciado:

$$\sigma = 6s ; n = 16 ; \bar{x} = 16 ; NC = 95\%$$

Para buscar el $z_{\alpha/2}$ utilizamos el valor $97.5\% = 0.975$, para buscar en la tabla, por lo que $z_{\alpha/2} = 1.96$. A partir de aquí sustituimos en la fórmula del intervalo de confianza.

$$IC = (\bar{x} \pm E) = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (16 \pm 2.94) = (13.06, 18.94) \text{ días}$$

4.b.2) Al aumentar el tamaño de la muestra a 64, la amplitud del intervalo, que se corresponde con el doble del error, disminuye:

$$A = 2E = 2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.94 \text{ días}$$

4.b.3) Para que la duración media de 14 días no este contenida en el intervalo de confianza se deberá disminuir la amplitud de este. Para ello, sin modificar el tamaño de la muestra, el nivel de confianza debe disminuir, para que el valor $z_{\alpha/2}$ sea menos que en el apartado b.1.