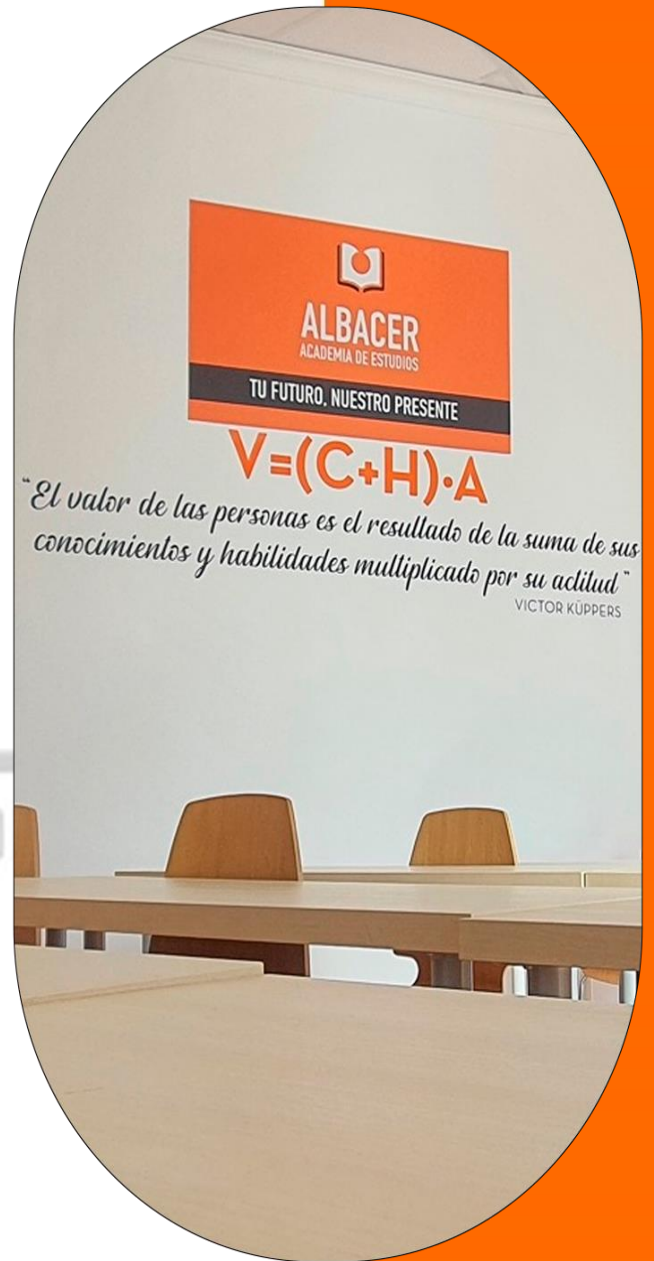


PAU 2026

Examen Matemáticas II

Soluciones Julio



Pregunta 1.

En un estudio sobre hábitos de consumo digital, se observa que la edad de las personas suscritas a plataformas de películas y series en streaming puede modelizarse mediante una distribución normal de media 34 años y desviación típica de 6 años.

Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar. Calcula:

- [1 punto]** La probabilidad de que una persona suscrita elegida al azar tenga una edad comprendida entre 28 y 46 años.
- [1 punto]** La edad K tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a K años.

1.a) La variable X : edad de las personas sigue una distribución normal, y las probabilidades se pueden calcular mirando en la tabla de la distribución normal tipificada tras tipificar la variable

$$X \sim N(\mu = 34, \sigma = 6)$$

$$P(28 \leq X \leq 46) = P_6 = P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$$

$$P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0.8185$$

1.b) En este caso hay que buscar un valor de la variable que cumpla:

$$P(X \geq K) = P(Z \geq K^*) = 0.1587$$

$$P(Z \geq K^*) = 1 - P(Z \leq K^*) = 0.1587$$

$$P(Z \leq K^*) = 1 - 0.1587 = 0.8413 \rightarrow K^* = 1$$

$$K = K^* \sigma + \mu = 40 \text{ años}$$

Pregunta 2.

En la toma de un antibiótico vía oral, la concentración en sangre (mg/l) tras su administración se puede modelizar como la función $C(t) = \frac{12t}{t^2 + 4}$, donde t es el tiempo transcurrido, en horas, desde la toma.

- [1 punto]** Determina el momento en el que la concentración en sangre es máxima.
- [1 punto]** La concentración media de dicho medicamento en el intervalo de tiempo $[a, b]$ viene dada por la expresión $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b C(t) dt$. Calcula la concentración media entre las 0 y 6 horas.

2.a) Para calcular el valor máximo de la concentración, es decir, de la función $C(t)$, calculamos en que instante el valor de la derivada se anula:

$$C'(t) = \frac{12(t^2 + 4) - 2t(12t)}{(t^2 + 4)^2} = 0 \rightarrow -12t^2 + 48 = 0 \rightarrow t = \pm 2$$

Debido a que es tiempo transcurrido desde su toma en horas, solo podemos aceptar como válido el valor $t = 2$. Para comprobar si es, en verdad un máximo:

$$C'(1) > 0 \text{ y } C'(3) < 0 \rightarrow t = 2 \text{ es un máximo}$$

2.b) Haciendo uso de la definición de media descrita tenemos:

$$\bar{C} = \frac{1}{6-0} \int_0^6 \frac{12t}{t^2 + 4} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{2} \int_0^6 \frac{2t}{t^2 + 4} dt = (\ln(6^2 + 4) - \ln(4)) = \ln 10 \text{ mg/l}$$

Pregunta 3.

a) [1,5 puntos] Estudia el rango de la siguiente matriz, en función del parámetro real a .

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

b) [0,5 puntos] ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? Justifica tu respuesta.

3.a) El rango de una matriz es el conjunto de filas o columnas linealmente independientes. Utilizando la propiedad del determinante, en el que el determinante de una matriz es distinto de cero si todas sus filas son independientes entre sí, es decir, su rango es igual que el orden del determinante.

$$|A| = a(a-1) + a(a^2-a) + a^2(a-1) - a(a^2-a) - a^2 - a(a-1)^2 = a^2 - 2a$$

$$a = 0 \text{ y } a = 2$$

Para todos los valores distintos de 0 y 2 el determinante mayor distinto de cero es de orden 3 y el rango de la matriz es 3. Para los otros valores:

- $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2, debido a que la primera columna es idénticamente nula y la segunda y la tercera son linealmente independientes.

- $a = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz también tiene rango 2, ya que las columnas 1 y 2 son linealmente dependientes entre sí, e independientes cualquiera de ellas respecto a la tercera.

3.b) Una matriz tiene inversa o es regular, si su determinante es distinto de cero, luego para cualquier valor de a distinto de 0 y 2 la matriz posee inversa.

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Se consideran los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 2, 1)$ y $D(a, 1, 2)$, con a un número real.

- [0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C .
- [1,25 puntos]** Determina los valores reales del parámetro a , para que el tetraedro formado por los cuatro puntos del enunciado tenga volumen 3 unidades cúbicas.

4.1.a) Si los puntos A , B y C están contenidos en el plano, entonces los vectores AB y AC son vectores del plano y su producto vectorial será el vector normal del plano:

$$AB = B - A = (1, -1, 1) \quad , \quad AC = C - A = (-1, 1, 1)$$

$$n_{\pi} = AB \times AC = (-2, -2, 0) \rightarrow n_{\pi} = (1, 1, 0)$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es: $\pi \equiv x + y + d = 0$, y para hallar el valor de d imponemos que contenga a cualquier punto, por ejemplo, al A .

$$\pi \equiv x + y - 2 = 0$$

4.1.b) El volumen de un tetraedro formado por tres vectores como aristas viene dado por un sexto del producto mixto de dichos vectores. Si imponemos que estas aristas sean AB , AC y $AD = D - A = (a - 1, 0, 2)$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-2a + 2| = 3 u^3$$

Esta ecuación de valor absoluto nos da dos resultados:

$$-2a + 2 = 18 \rightarrow a = -8$$

$$-2a + 2 = -18 \rightarrow a = 10$$

4.2. Sean los puntos del espacio $A(1, 2, -1)$, $B(3, 6, 1)$ y $C(m, m, m-2)$, donde m es un número real.

- a) **[0,75 puntos]** Determina el valor de m para que los puntos A , B y C estén alineados.
 b) **[1,25 punto]** Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determina la distancia del punto $P(2,0,1)$ a la recta que forman A , B y C .

4.2.a) Para que los tres puntos estén alineados se debe cumplir que los vectores AB y AC sean proporcionales, es decir:

$$AB = B - A = (2, 4, 2) \quad , \quad AC = C - A = (m - 1, m - 2, m - 1)$$

$$\frac{2}{m - 1} = \frac{4}{m - 2} = \frac{2}{m - 1} \rightarrow 2(m - 2) = 4(m - 1) \rightarrow m = 0$$

4.2.b) Para calcular la distancia de un punto a una recta podemos utilizar la relación siguiente, teniendo en cuenta que tanto A , B o C son puntos de la recta y que el vector director es cualquiera de los calculados anteriormente.

$$d(P, r) = \frac{|v_r \times PP_r|}{|v_r|}$$

$$v_r = AB = (2, 4, 2) \quad , \quad |v_r| = 2\sqrt{6}$$

$$PP_r = P_r - P = A - P = (1, -2, 2)$$

$$v_r \times PP_r = (12, 2, -8) \quad , \quad |v_r \times PP_r| = 2\sqrt{53}$$

$$d(P, r) = \frac{|v_r \times PP_r|}{|v_r|} = \sqrt{\frac{53}{6}} \, u$$

5.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- a) [1 punto] Halla, razonadamente, los coeficientes a , b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas (1,4) y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=3$ es paralela a la recta de ecuación $y = 2x - 1$
- b) [1 punto] Para los valores de los coeficientes obtenidos en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=0$.

5.1.a) Para que la función cumpla las condiciones del enunciado debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

- Pasa por el (1,4): $f(1) = 4 \rightarrow 1 + a + b + c = 4$
- Extremo relativo en el (1,4): $f'(1) = 0 \rightarrow 3 + 2a + b = 0$
- La recta tangente tiene pendiente $m = 2$ en $x = 3$:

$$f'(3) = 27 + 6a + b = 2$$

Este sistema se puede resolver por sustitución o cualquiera de los métodos tradicionales algebraicos, y tiene por solución:

$$a = -\frac{11}{2}, \quad b = 8, \quad c = \frac{1}{2}$$

5.1.b) La ecuación de la recta normal en un punto viene dado por:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$x_0 = 0, \quad f(0) = c = \frac{1}{2}, \quad f'(0) = b = 8$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}x$$

5.2. Resuelve los siguientes apartados

a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad y \quad g(x) = -x + 4.$$

b) **[0,75 puntos]** Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

5.2.a) Definimos la función $h(x) = f(x) - g(x)$ que representa la distancia entre las dos funciones. El área entre las gráficas vendrá definida por la integral de $h(x)$ entre los puntos de corte de las dos funciones, que se calcula a partir de:

$$h(x) = 0 \rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\frac{3}{x} = -x + 4 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$$

$$A = \left| \int_1^3 h(x) dx \right| = \left| \int_1^3 \left(\frac{3}{x} - (-x + 4) \right) dx \right| = \left| 3 \ln x + \frac{x^2}{2} - 4x \right|$$

$$A = \left| 3 \ln 3 + \frac{9}{2} - 12 - 3 \ln 1 - \frac{1}{2} + 4 \right| = 4 - 3 \ln 3 \quad u^2$$

5.3.b) En los límites con indeterminaciones $0/0$ o ∞/∞ utilizamos la regla de L'Hôpital para resolver dicho límite. Podemos utilizarlo todas las veces que necesitemos hasta resolver la indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]^{IND} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right]^{IND} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}$$